УДК 517.95
DOI: 10.47928/1726-9946-2020-20-2-6-11

О представлении решения уравнения в частных производных первого порядка с оператором дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна

Богатырева Ф.Т.

Представлено академиком АМАН А.В. Псху

1. Введение. В области $\Omega = (0,p)\times(0,q)$, $p\le\infty$, $q\le\infty$ рассмотрим уравнение

$$Lu(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)+a\frac{\partial^\mu}{\partial y^\mu}u(x,y)+b\frac{\partial^\nu}{\partial y^\nu}u(x,y)=f(x,y), \tag{1}$$

где $\frac{\partial^\mu}{\partial y^\mu}, \frac{\partial^\nu}{\partial y^\nu}$ – дробные производные порядков μ,ν соответственно. Дробное дифференцирование задано операторами Джрбашяна – Нерсесяна, ассоциированными с упорядоченными парами $\{\alpha,\beta\}$ и $\{\gamma,\delta\}$, $(\alpha,\beta,\gamma,\delta\in(0,1])$, порядков $\mu=\alpha+\beta-1>0$ и $\nu=\gamma+\delta-1>0$, соответственно, a,b – const, $f(x,y)$ – заданная действительная функция. Не нарушая общности положим, что $\mu>\nu$.

Оператор дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна порядка ϑ, ассоциированный с упорядоченной парой $\{\xi,\eta\}$ определяется соотношением [1]

$$\frac{\partial^\vartheta}{\partial y^\vartheta}=D_{0y}^{\{\xi,\eta\}}=D_{0y}^{\eta-1}D_{0y}^{\xi},\ \vartheta=\xi+\eta-1,\ \xi,\eta\in(0,1], \tag{2}$$

где $D_{0y}^{\eta-1}$ и D_{0y}^{ξ} – дробный интеграл и дробная производная Римана – Лиувилля, соответственно, с началом в точке $y=0$ [2]

$$D_{0y}^{\eta-1}g(y)=\frac{1}{\Gamma(1-\eta)}\int\limits_0^y g(t)(y-t)^{-\eta}dt,$$

$$D_{0y}^{\xi}g(y)=\frac{d}{dy}\frac{1}{\Gamma(1-\xi)}\int\limits_0^y g(t)(y-t)^{-\xi}dt.$$

Впервые оператор дробного дифференцирования вида (2) был рассмотрен в работе [1], где для линейного обыкновенного дифференциального уравнения доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Линейные дифференциальные уравнения с частными производными дробного порядка, не превосходящего единицу, исследовались в работах [3-8]. В указанных работах для уравнений вида (1) изучались начальные и краевые задачи в ограниченных и неограниченных прямоугольных областях.

В случае, когда $\gamma=0,\ \delta=1$ для уравнения вида (1) построены фундаментальные решения и решены краевые задачи в работах [9, 10]. В работе [11] для уравнения вида (1) с оператором дробного дискретно распределённого дифференцирования решена краевая задача в прямоугольной области. Построено представление решения, доказаны теоремы существования и единственности. В терминах параметров, определяющих дробный дифференциальный оператор, указаны необходимые и достаточные условия разрешимости исследуемой задачи.

В работах [12-14] исследованы обобщенные уравнения вида (1) с матричными коэффициентами. А именно, в работах [12, 13] изучены нелокальные краевые задачи в прямоугольной области для линейной системы уравнений с частными производными вида (1) с оператором Римана – Лиувилля. В работе [14] впервые рассмотрена система уравнений дробного порядка с оператором Джрбашяна – Нерсесяна, где в частности, доказана теорема существования и единственности задачи Коши.

Уравнение вида (1) имеет практическое применение в математическом моделировании биологических процессов. В частности, в работах [15, 16] уравнение (1) приводят в качестве математической модели для описания развития замкнутой популяции особей с учетом возрастных взаимодействий.

В данной работе построено общее представление решения дифференциального уравнения с частными производными.

2. Предварительные сведения. *Регулярным решением* уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u = u(x, y)$, такую что

$$u_x(x,y), D_{0y}^{\sigma}u(x,y) \in C(\Omega),\ D_{0y}^{\sigma-1}u(x,y) \in C(\Omega \cup \{(x,y) : y = 0\}), \sigma = \max\{\alpha, \gamma\},$$

$$y^{1-\zeta}u(x,y) \in C(\Omega_0), \Omega_0 = [0,p) \times [0,q),$$

ζ – некоторое положительное число; функция $u = u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1) во всех точках $(x, y) \in \Omega$.

Введем в рассмотрение специальную функцию, в терминах которой будет построено решение уравнения (1):

$$w_\xi(x,y) = y^{\xi_1-1}e_{1,\mu}^{1,\xi_1}\left(-a\frac{x}{y^\mu}\right) * y^{\xi_2-1}e_{1,\nu}^{1,\xi_2}\left(-b\frac{x}{y^\nu}\right),\ \xi = \xi_1 + \xi_2, w_0(x,y) = w(x,y),$$

где

$$e_{\alpha,\beta}^{\mu,\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \mu)\Gamma(\nu - \beta n)}$$

– функция типа Райта [6], которая в случае $\alpha = \mu = 1$ совпадает с функцией Райта [17],

$$(f * g)(y) = \int_0^y f(t)g(y-t)dt$$

– свертка Лапласа функций $f(y)$ и $g(y)$. Здесь и далее свертка осуществляется по переменной y.

Приведем некоторые свойства операторов дробного интегрирования и дифференцирования необходимые для дальнейшего изложения:

а) формула дробного интегрирования по частям

$$\int\limits_a^b h(y) D_{ay}^{-\alpha} g(y) dy = \int\limits_a^b g(y) D_{by}^{-\alpha} h(y) dy, \quad \alpha > 0; \tag{3}$$

б) закон композиции

$$D_{ay}^{\delta} D_{ay}^{\varepsilon} h(y) = D_{ay}^{\delta+\varepsilon} h(y), \qquad (\delta \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \le 0);$$

в) обобщенная формула Ньютона-Лейбница

$$D_{ay}^{\varepsilon} D_{ay}^{\delta} h(y) = D_{ay}^{\varepsilon+\delta} h(y) - \sum_{j=1}^{p} \frac{|y-a|^{-\varepsilon-j}}{\Gamma(1-\varepsilon-j)} \left[D_{ay}^{\delta-j} h(y) \right]_{y=a}, \ \varepsilon \in \mathbb{R}, \delta \in (p-1, p], \ p \in \mathbb{N};$$

г) формула свертки степенных функций

$$\frac{y^{\varepsilon-1}}{\Gamma(\varepsilon)} * \frac{y^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} = \frac{y^{\varepsilon+\delta-1}}{\Gamma(\varepsilon+\delta)}, \quad \varepsilon, \delta > 0.$$

3. Основной результат. Здесь мы сформулируем и докажем теорему об общем представлении решения уравнения (1).

Теорема. *Пусть $f(x,y) \in L(\Omega)$, и $\tau(y) \in L(0,q)$. Тогда, если $u(x,y)$ – регулярное решение уравнения* (1)*, то оно может быть представлено в виде*

$$u(x,y) = F(x,y) + T(x,y) + \Phi(x,y) + \Psi(x,y), \tag{4}$$

где

$$F(x,y) = \int\limits_0^x \int\limits_0^y f(s,t) w(x-s, y-t) dt ds,$$

$$T(x,y) = \int\limits_0^y \tau(t) w(x, y-t) dt,$$

$$\Phi(x,y) = a \int\limits_0^x \varphi(s) w_{1-\beta}(x-s, y) ds, \quad \Psi(x,y) = b \int\limits_0^x \psi(s) w_{1-\delta}(x-s, y) ds,$$

$\tau(y) = u(0,y), \quad \varphi(x) = \lim\limits_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x,y), \quad \psi(x) = \lim\limits_{y \to 0} D_{0y}^{\gamma-1} u(x,y).$

Доказательство. Обозначим

$$v(x,y;s,t) = \int\limits_s^x \int\limits_t^y w(x-s_1; y-t_1) ds_1 dt_1. \tag{5}$$

Функция $v(x,y;s,t)$, как функция переменных $s \in (0,x)$ и $t \in (0,y)$, удовлетворяет уравнению

$$-v_s(x,y;s,t) + aD_{yt}^{\{\beta,\alpha\}}v(x,y;s,t) + bD_{yt}^{\{\delta,\gamma\}}v(x,y;s,t) = 1 \quad (6)$$

и условиям

$$v(x,y;x,t) = 0, \quad t \in [0,y]; \quad v(x,y;s,y) = 0, \quad s \in [0,x]. \quad (7)$$

Пусть $u(x,y)$ – регулярное решение уравнения (1). Рассмотрим выражение

$$\int\limits_0^x \int\limits_0^y v(x,y;s,t)f(s,t)dtds =$$

$$= \int\limits_0^x \int\limits_0^y v(x,y;s,t)\left[u_s(s,t) + aD_{0t}^{\{\alpha,\beta\}}u(s,t) + bD_{0t}^{\{\gamma,\delta\}}u(s,t)\right]dtds. \quad (8)$$

Проинтегрируем каждое слагаемое в правой части (8) отдельно. Пользуясь формулой интегрирования по частям, и учитывая (7) имеем

$$\int\limits_0^x \int\limits_0^y u_s(s,t)v(x,y;s,t)dtds = \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0} \int\limits_{\varepsilon_1}^x \int\limits_{\varepsilon_2}^y u_s(s,t)v(x,y;s,t)dtds =$$

$$= -\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0}\left(\int\limits_{\varepsilon_1}^x \int\limits_{\varepsilon_2}^y u(s,t)v_s(x,y;s,t)dtds + \int\limits_{\varepsilon_2}^y u(\varepsilon_1,t)v(x,y;\varepsilon_1,t)dt\right) =$$

$$= -\int\limits_0^x \int\limits_0^y u(s,t)v_s(x,y;s,t)dtds - \int\limits_0^y \tau(t)v(x,y;0,t)dt. \quad (9)$$

Далее, в силу определения (2), формулы дробного интегрирования по частям (3), а так же равенств (7), получим

$$\int\limits_0^x \int\limits_0^y v(x,y;s,t)D_{0t}^{\{\alpha,\beta\}}u(s,t)dtds = \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0} \int\limits_{\varepsilon_1}^x \int\limits_{\varepsilon_2}^y D_{yt}^{\beta-1}v(x,y;s,t)\frac{\partial}{\partial t}D_{0t}^{\alpha-1}u(s,t)dtds =$$

$$= \int\limits_0^x \int\limits_0^y D_{yt}^{\{\beta,\alpha\}}v(x,y;s,t)u(s,t)dtds - \int\limits_0^x \varphi(s)D_{0y}^{\beta-1}v(x,y;s,0)ds. \quad (10)$$

Аналогично получим

$$\int\limits_0^x \int\limits_0^y v(x,y;s,t)D_{0t}^{\{\gamma,\delta\}}u(s,t)dtds =$$

$$= \int\limits_0^x \int\limits_0^y D_{yt}^{\{\delta,\gamma\}}v(x,y;s,t)u(s,t)dtds - \int\limits_0^x \psi(s)D_{0y}^{\delta-1}v(x,y;s,0)ds. \quad (11)$$

Подставляя формулы (9)–(11) в равенство (8), с учетом соотношения (6), запишем

$$\int\limits_0^x \int\limits_0^y v(x,y;s,t)f(s,t)dtds = \int\limits_0^x \int\limits_0^y u(s,t)dtds - \int\limits_0^y u(0,t)v(x,y;0,t)dt-$$

$$-\int\limits_0^x \left[a\varphi(s)D_{0y}^{\beta-1}v(x,y;s,0) + b\psi(s)D_{0y}^{\delta-1}v(x,y;s,0)\right] ds.$$

Дифференцируя обе части последнего равенства по x и по y, с учетом обозначения (5) приходим к представлению (4). Теорема доказана.

4. Заключение. Таким образом, мы показали, что любое регулярное решение уравнения (1) представимо в виде (4). Из этой теоремы, вообще говоря, не следует, что любая функция вида (8) будет априори решением уравнения (1). Для того, чтобы это имело место необходимо накладывать условия, связанные с характером гладкости функций τ, φ и ψ. Кроме того, в зависимости от распределения параметров α, β, γ и δ, некоторые из слагаемых в представлении (4) могут необходимо равны нулю. А именно, одна или обе из функций Φ и Ψ, определенных равенствами (11), могут исчезать. Поэтому, корректность тех или иных краевых задач для уравнения (4) будет зависеть от набора этих параметров, и различные пары $\{\alpha, \beta\}$ и $\{\gamma, \delta\}$ порождают, вообще говоря, разные краевые задачи. Более подробное изложение этих вопросов станет предметом дальнейших работ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН АрмССР. Матем., 1968. С. 3–28.
2. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
3. *Clèment Ph., Gripenberg G., Londen S-O.* Schauder estimates for equations with fractional derivatives // Transactions of the American Mathematical Society, 2000, vol. 352, № 5, pp. 2239–2260.
4. *Псху А.В.* Решение краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. академии наук. 2000. Т. 5, № 1. С. 45–53.
5. *Псху А.В.* Решение краевой задачи для уравнения с частными производными дробного порядка // Дифференциальные уравнения, 2003. Т. 39, № 8. С. 1092–1099.
6. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 195 с.
7. *Мамчуев М.О.* Краевая задача для уравнения первого порядка с частной производной дробного порядка с переменными коэффициентами // Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2009. Т. 11, № 1. С. 32–35.
8. *Псху А.В.* Краевая задача для многомерного дифференциального уравнения дробного порядка // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 3. С. 385–395.
9. *Богатырева Ф.Т.* Краевая задача для уравнения в частных производных первого порядка с оператором Джрбашяна – Нерсесяна // Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т. 17, № 1. С. 9-16.

10. *Богатырева Ф.Т.* Краевая задача для уравнения в частных производных с оператором Джрбашяна – Нерсесяна // Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т. 17, № 2. С. 17–24.
11. *Псху А.В.* Краевая задача для уравнения в частных производных первого порядка с оператором дробного дискретно распределённого дифференцирования // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1682–1684.
12. *Мамчуев М.О.* Краевая задача для линейной системы уравнений с частными производными дробного порядка. Челябинский физико-математический журнал. 2017. Т. 2, вып. 3. С. 295–311.
13. *Mamchuev M.O.* Non-local boundary value problem for a system of equations with the partial derivatives of fractional order // Mathematical notes of NEFU, 26(1), pp. 23–31. doi: https://doi.org/10.25587/SVFU.2019.101.27244.
14. *Mamchuev M.O.* Cauchy problem for a linear system of ordinary differential equations of the fractional order // Mathematics, 2020, 8(9), 1475.
15. *Лосанова Ф.М., Кенетова Р.О.* Нелокальная задача для обобщенного уравнения Маккендрика – фон Фёрстера с оператором Капуто // Нелинейный мир. 2018. Т. 16, № 1. С. 49–53.
16. *Березгова Р.З.* Априорная оценка решения нелокальной краевой задачи для уравнения Маккендрика – фон Фёрстера дробного порядка // Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2020. Т. 20, № 1. С. 9–14.
17. *Wright E.M.* On the coefficients of power series having exponential singularities // Journal London Mathematical Society, vol. s1-8, № 1, 1933, pp. 71–79.

ABSTRACT

For a first-order partial differential equation with the Dzhrbashyan – Nersesyan operator of fractional differentiation, we construct a fundamental solution and derive a general representation of the solutions in rectangular domains.

Keywords. Partial differential equation, Dzhrbashyan – Nersesyan operator, Wright function.

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik; fatima_bogatyreva@bk.ru

АННОТАЦИЯ

Для уравнения в частных производного первого порядка с операторами дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна построено фундаментальное решение и найдено общее представление решений в прямоугольной области.

Ключевые слова. Уравнение в частных производных, оператор Джрбашяна – Нерсесяна, функция Райта.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик;
fatima_bogatyreva@bk.ru