УДК 517.956.4
DOI: 10.47928/1726-9946-2020-20-2-12-15

Об эквивалентности двух представлений функции Грина первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка

Хуштова Ф.Г.

Представлено академиком АМАН А.В. Псху

В работе [1] (см. также [2, с. 107]) исследована первая краевая задача в прямоугольной области $D = \{0 < x < r, 0 < y < b\}$ для уравнения диффузии дробного порядка

$$u_{xx}(x,y) - D^{\alpha}_{0y}u(x,y) = f(x,y). \tag{1}$$

Функция Грина построена в виде

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{2}\times$$
$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\phi\left(-\beta,\beta;-\frac{|x-\xi+2nr|}{(y-\eta)^{\beta}}\right) - \phi\left(-\beta,\beta;-\frac{|x+\xi+2nr|}{(y-\eta)^{\beta}}\right)\right], \tag{2}$$

где $\phi(-\beta,\beta;z)$ – функция Райта [3], [4], $\beta = \alpha/2$.

В работе [5] показано, что функция Грина первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка может быть представлена также в виде

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{2\,(y-\eta)^{\alpha-1}}{r}\sum_{n=1}^{\infty}E_{\alpha,\alpha}\left(-\left(\frac{\pi n}{r}\right)^2(y-\eta)^{\alpha}\right)\sin\frac{\pi n}{r}\,x\sin\frac{\pi n}{r}\,\xi, \tag{3}$$

где $E_{\alpha,\alpha}(z)$ – функция типа Миттаг-Леффлера [6, с. 117]. Сходимость ряда (3) следует из свойств функции $E_{\alpha,\alpha}(z)$ [6, с. 134].

Представление (3) получено как частный случай функции Грина первой краевой задачи в прямоугольной области для более общего уравнения.

Докажем эквивалентность представлений (2) и (3). Функцию (3) можно рассматривать как разложение в ряд Фурье по синусам на интервале $(0,r)$

$$G(x,y,\xi,\eta) = \sum_{n=1}^{\infty}G_n\sin\frac{\pi n}{r}\,\xi. \tag{4}$$

Запишем функцию (2) в виде

$$G(x,y,\xi,\eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[G_0(x,y,2nr+\xi,\eta) - G_0(x,y,2nr-\xi,\eta)\right], \tag{5}$$

где

$$G_0(x,y,\xi,\eta) = \frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{2}\phi\left(-\beta,\beta;-\frac{|x-\xi|}{(y-\eta)^{\beta}}\right). \tag{6}$$

Вычислим коэффициенты Фурье функции (5)

$$G_n = \frac{2}{r}\int\limits_0^r G(x,y,\xi,\eta)\sin\frac{\pi n}{r}\,\xi\,d\xi =$$

$$= \frac{2}{r}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\int\limits_0^r G_0(x,y,2nr+\xi,\eta)\sin\frac{\pi n}{r}\,\xi\,d\xi - \int\limits_0^r G_0(x,y,2nr-\xi,\eta)\sin\frac{\pi n}{r}\,\xi\,d\xi\right].$$

В последних двух интегралах сделаем замены $s = 2nr+\xi$ и $t = 2nr-\xi$ соответственно

$$G_n = \frac{2}{r}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\int\limits_{2nr}^{(2n+1)r} G_0(x,y,s,\eta)\sin\frac{\pi n}{r}\,s\,ds + \int\limits_{(2n-1)r}^{2nr} G_0(x,y,t,\eta)\sin\frac{\pi n}{r}\,t\,dt\right] =$$

$$= \frac{2}{r}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(x,y,\xi,\eta)\sin\frac{\pi n}{r}\,\xi\,d\xi.$$

Подставим в последний интеграл значение $G_0(x,y,\xi,\eta)$ из (6)

$$G_n = \frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{r}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi\left(-\beta,\beta;-\frac{|x-\xi|}{(y-\eta)^{\beta}}\right)\sin\frac{\pi n}{r}\,\xi\,d\xi$$

и сделаем в последнем интеграле замену $\xi = x+t$. Учитывая известную формулу

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b,$$

получим

$$G_n = \frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{r}\sin\frac{\pi n}{r}\,x\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi\left(-\beta,\beta;-\frac{|t|}{(y-\eta)^{\beta}}\right)\cos\frac{\pi n}{r}\,t\,dt+$$

$$+\frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{r}\cos\frac{\pi n}{r}\,x\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi\left(-\beta,\beta;-\frac{|t|}{(y-\eta)^{\beta}}\right)\sin\frac{\pi n}{r}\,t\,dt.$$

В силу нечётности подынтегральной функции, второй интеграл равен нулю. Тогда первый, в силу чётности подынтегральной функции, запишется в виде

$$G_n = \frac{2(y-\eta)^{\beta-1}}{r}\sin\frac{\pi n}{r}\,x\int\limits_0^{\infty}\phi\left(-\beta,\beta;-\frac{t}{(y-\eta)^{\beta}}\right)\cos\frac{\pi n}{r}\,t\,dt.$$

Из формулы [2, с. 84]

$$\int_0^\infty \phi\left(-\mu, \nu; -\frac{t}{z^\mu}\right)\cos\lambda t\,dt = z^\mu E_{2\mu,\mu+\nu}(-\lambda^2 z^{2\mu}),$$

с учётом обозначения $\alpha = 2\beta$, окончательно находим

$$G_n = \frac{2(y-\eta)^{\alpha-1}}{r}E_{\alpha,\alpha}\left(-\left(\frac{\pi n}{r}\right)^2 (y-\eta)^\alpha\right)\sin\frac{\pi n}{r}x.$$

Подставляя полученное выражение для коэффициентов Фурье G_n в (4), приходим к представлению (3).

Заметим, что эквивалентность представлений (2) и (3) имеет место при $0 < x, \xi < r$.

Аналогично могут быть доказаны, что представления функций Грина [7]

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{2}\times$$
$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\phi\left(-\beta,\beta;-\frac{|x-\xi+2nr|}{(y-\eta)^\beta}\right)+\phi\left(-\beta,\beta;-\frac{|x+\xi+2nr|}{(y-\eta)^\beta}\right)\right],$$

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{2}\times$$
$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\left[\phi\left(-\beta,\beta;-\frac{|x-\xi+2nr|}{(y-\eta)^\beta}\right)-\phi\left(-\beta,\beta;-\frac{|x+\xi+2nr|}{(y-\eta)^\beta}\right)\right],$$

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{2}\times$$
$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\left[\phi\left(-\beta,\beta;-\frac{|x-\xi+2nr|}{(y-\eta)^\beta}\right)+\phi\left(-\beta,\beta;-\frac{|x+\xi+2nr|}{(y-\eta)^\beta}\right)\right]$$

второй и двух смешанных краевых задач для уравнения (1) эквивалентны представлениям

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{2\,(y-\eta)^{\alpha-1}}{r}\sum_{n=1}^{\infty}E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_n^2\,(y-\eta)^\alpha\right)\cos\lambda_n x\cos\lambda_n\xi, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{r},$$

$$G(x,\xi,y-\eta) = \frac{2\,(y-\eta)^{\alpha-1}}{r}\sum_{n=1}^{\infty}E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_n^2\,(y-\eta)^\alpha\right)\sin\lambda_n x\sin\lambda_n\xi, \quad \lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2r},$$

$$G(x,\xi,y-\eta) = \frac{2\,(y-\eta)^{\alpha-1}}{r}\sum_{n=1}^{\infty}E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_n^2\,(y-\eta)^\alpha\right)\cos\lambda_n x\cos\lambda_n\xi, \quad \lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2r}$$

соответственно.

В случае классического уравнения диффузии ($\alpha = 1$) эквивалентность форм представлений, соответствующих представлениям (2) и (3), доказана в работе [8, с. 474].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Псху А.В.* Решение первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 9. С. 1286–1289.
2. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука. 2005. 199 с.
3. *Wright E.M.* On the coefficients of power series having exponential singularities // Journal of the London Mathematical Society, 1933, vol. s1-8, № 1, pp. 71–79.
4. *Wright E.M.* The generalized Bessel function of order greater than one // The Quarterly Journal of Mathematics, 1940, vol. os-11, № 1, pp. 36–48.
5. *Хуштова Ф.Г.* Первая краевая задача в прямоугольной области для дифференциального уравнения с оператором Бесселя и частной производной Римана–Лиувилля // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. (в печати)
6. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.
7. *Псху А.В.* Решение краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка методом функции Грина // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 10. С. 1430–1433.
8. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.

ABSTRACT

In this paper, the equivalence of two forms of representations of the Green's function of the first boundary value problem for the fractional diffusion equation is proved.

Keywords. Green's function, fractional diffusion equation, Wright's function, Mittag – Leffler type function.

IInstitute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik; khushtova@ya.ru

АННОТАЦИЯ

Доказана эквивалентность двух форм представлений функции Грина первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка.

Ключевые слова. функция Грина, уравнение диффузии дробного порядка, функция Райта, функция типа Миттаг – Леффлера.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик; khushtova@ya.ru