

УДК 517.95

DOI: 10.47928/1726-9946-2020-20-3-6-13

## Краевые задачи с данными на противоположных характеристиках для смешанно-гиперболического уравнения второго порядка

Балкизов Ж.А.

Представлено академиком АМАН Псху А.В.

**Введение. Постановка задачи.** На евклидовой плоскости точек  $(x, y)$  рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} (-y)^m u_{xx} - u_{yy}, & y < 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + f(x, y), & y > 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $m$  – заданное положительное число,  $f = f(x, y)$  – заданная функция,  $u = u(x, y)$  – искомая функция.

Уравнение (1) при  $y < 0$  является вырождающимся гиперболическим уравнением первого рода (уравнение Геллерстедта)

$$(-y)^m u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad (2)$$

а при  $y > 0$  уравнение (1) совпадает с неоднородным волновым уравнением

$$u_{xx} - u_{yy} + f(x, y) = 0. \quad (3)$$

Уравнение (1) рассматривается в области  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup I$ , где  $\Omega_1$  – это область, ограниченная характеристиками

$$\sigma_1 = AC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 0 \text{ и } \sigma_2 = CB : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = r$$

уравнения (2), выходящими из точки  $C = (r/2, y_C)$ ,  $y_C = -\left[\frac{r(m+2)}{4}\right]$ , проходящими через точки  $A = (0, 0)$  и  $B = (r, 0)$ , соответственно, и отрезком  $I = AB$  прямой  $y = 0$ ;  $\Omega_2$  – область, ограниченная характеристиками

$$\sigma_3 = AD : x - y = 0, \quad \sigma_4 = BD : x + y = r$$

уравнения (3), выходящими из точек  $A$  и  $B$ , пересекающимися в точке  $D = (\frac{r}{2}, \frac{r}{2})$  и отрезком  $I = AB$ .

*Регулярным в области  $\Omega$  решением* уравнения (1) назовем функцию  $u = u(x, y)$  из класса  $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ ,  $u_x(x, 0), u_y(x, 0) \in L_1(0, r)$ , при подстановке которой, уравнение (1) обращается в тождество.

**Задача 1.** Найти регулярное в области  $\Omega$  решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u[\theta_{00}(x)] = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (4)$$

$$u[\theta_{01}(x)] = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (5)$$

где  $\theta_{00}(x) = \left(\frac{x}{2}; -\left[\frac{(m+2)x}{4}\right]^{2/(m+2)}\right)$ ,  $\theta_{01}(x) = \left(\frac{x}{2}; \frac{x}{2}\right)$  – аффиники точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки  $(x, 0)$  с характеристиками  $AC$  и  $AD$  соответственно;  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$  – заданные на отрезке  $[0, r]$  функции.

**Задача 2.** Найти регулярное в области  $\Omega$  решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u[\theta_{r0}(x)] = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (6)$$

$$u[\theta_{r1}(x)] = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (7)$$

где  $\theta_{r0}(x) = \left(\frac{r+x}{2}; -\left[\frac{(m+2)(r-x)}{4}\right]^{2/(m+2)}\right)$ ,  $\theta_{r1}(x) = \left(\frac{r+x}{2}; \frac{r-x}{2}\right)$  – аффиники точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки  $(x, 0)$  с характеристиками  $BC$  и  $BD$  соответственно;  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$  – заданные на отрезке  $[0, r]$  функции.

**Задача 3.** Найти регулярное в области  $\Omega$  решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (4) и (7).

**Задача 4.** Найти регулярное в области  $\Omega$  решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (5) и (6).

Сформулированная выше задача 1 является частным случаем задачи Гурса, исследованной в работах [1]–[2], а задача 2 есть частный случай первой краевой задачи, исследованной в работе [3]. Аналог задачи 4 был исследован в работе [4]. Задачи со смещением для вырождающихся внутри области гиперболических уравнений были исследованы в работах [5–8]. В данной работе найдены решения задач 3 и 4 с данными на противоположных характеристиках. Известно, что при  $t = 0$  задачи 3 и 4 с данными на противоположных характеристиках для уравнения (1) в области, ограниченной характеристическим четырехугольником, поставлены некорректно. Однако, как показано в данной работе, при  $t > 0$  и при определенных условиях на заданные функции  $f(x, y)$ ,  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$  решение задач 3 и 4 существует, единственно и записывается в явном виде.

**Теорема единственности решения задачи 3.** Справедлива следующая  
**Теорема 1.** Если существует регулярное в области  $\Omega$  решение задачи 3, то оно единствено.

*Доказательство.* Для доказательства теоремы единственности решения задачи 3 воспользуемся методом Трикоми. Пусть существует решение задачи 3 и пусть

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad (0 \leq x \leq r), \quad u_y(x, 0) = \nu(x), \quad (0 < x < r). \quad (8)$$

Найдем фундаментальные соотношения между искомыми функциями  $\tau(x)$  и  $\nu(x)$ , принесенные из соответствующих частей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  области  $\Omega$  на линию  $y = 0$ .

Воспользуемся представлением решения задачи (8) для уравнения (2) (формула Дарбу) [9, с. 45], [10, с. 103]:

$$u(x, y) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \int_0^1 \tau \left[ x + (1-2\beta)(-y)^{1/(1-2\beta)}(1-2t) \right] t^{\beta-1} (1-t)^{\beta-1} dt +$$

$$+ \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)} y \int_0^1 \nu [x + (1-2\beta)(-y)^{1/(1-2\beta)}(1-2t)] t^{-\beta} (1-t)^{-\beta} dt, \quad (9)$$

где  $\beta = \frac{m}{2(m+2)}$ .

Удовлетворяя (9) условию (4), найдем

$$\begin{aligned} u[\theta_{00}(x)] &= \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \int_0^1 \tau(x-xt) t^{\beta-1} (1-t)^{\beta-1} dt - \\ &- \frac{\Gamma(2-2\beta)(2-4\beta)^{2\beta-1}}{\Gamma^2(1-\beta)} x^{1-2\beta} \int_0^1 \nu(x-xt) t^{-\beta} (1-t)^{-\beta} dt = \psi_1(x). \end{aligned} \quad (10)$$

Вводя под знаками интегралов равенства (10) новую переменную интегрирования  $z$  по формуле  $z = x - xt$ , из (10) приходим к равенству

$$\psi_1(x) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} x^{2\beta-1} \int_0^x \frac{\tau(z) z^{\beta-1}}{(x-z)^{1-\beta}} dz - \frac{\Gamma(2-2\beta)(2-4\beta)^{2\beta-1}}{\Gamma^2(1-\beta)} \int_0^x \frac{\nu(z) z^{-\beta}}{(x-z)^\beta} dz.$$

В терминах оператора  $D_{cx}^\alpha$  дробного (в смысле Римана-Лиувилля) интегро-дифференцирования [11, с. 9], последнее равенство перепишется в следующей форме

$$\psi_1(x) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)} x^{2\beta-1} D_{0x}^{-\beta} [t^{\beta-1} \tau(t)] - \frac{\Gamma(2-2\beta)(2-4\beta)^{2\beta-1}}{\Gamma(1-\beta)} D_{0x}^{\beta-1} [t^{-\beta} \nu(t)]. \quad (11)$$

Подействовав на обе части равенства (11) оператором  $D_{0x}^{1-\beta}$  дробного дифференцирования порядка  $1-\beta$ , и воспользовавшись свойствами композиции операторов дробного дифференцирования и интегрирования с одинаковыми началами [11, с. 18], приходим к соотношению

$$\nu(x) = \gamma_1 D_{0x}^{1-2\beta} \tau(t) - \gamma_2 x^\beta D_{0x}^{1-\beta} \psi_1(t). \quad (12)$$

где  $\gamma_1 = \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)(2-4\beta)^{1-2\beta}}{\Gamma(2-2\beta)\Gamma(\beta)}$ ,  $\gamma_2 = \frac{\Gamma(\beta)\gamma_1}{\Gamma(2\beta)}$ .

Соотношение (12) и есть первое искомое фундаментальное соотношение между функциями  $\tau(x)$  и  $\nu(x)$ , принесенное из области  $\Omega_1$  на линию  $I = AB$ .

Найдем теперь фундаментальное соотношение между функциями  $\tau(x)$  и  $\nu(x)$ , принесенное из области  $\Omega_2$  на линию  $y = 0$ . Для этого воспользуемся следующим представлением решения задачи Коши (8) для уравнения (3) в области  $\Omega_2$  (формула Даламбера) [12, с. 59]:

$$u(x, y) = \frac{\tau(x+y) + \tau(x-y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \nu(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^y \int_{x-y+t}^{x+y-t} f(s, t) ds dt. \quad (13)$$

Удовлетворяя (13) условию (7) будем иметь

$$u[\theta_{r1}(x)] = \frac{\tau(x) + \tau(r)}{2} + \frac{1}{2} \int_x^r \nu(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{r-x}{2}} \int_{x+t}^{r-t} f(s, t) ds dt = \psi_2(x).$$

Путем дифференцирования из последнего равенства приходим к соотношению

$$\nu(x) = \tau'(x) - 2\psi'_2(x) - \int_0^{\frac{r-x}{2}} f(x+t, t) dt. \quad (14)$$

Соотношение (14) есть второе фундаментальное соотношение между функциями  $\tau(x)$  и  $\nu(x)$ , принесенное из области  $\Omega_2$  на линию  $I = AB$ .

Рассмотрим теперь однородную задачу, соответствующую задаче 3, то есть положим  $f(x, y) \equiv 0 \quad \forall (x, y) \in \overline{\Omega_2}$ ,  $\psi_1(x) \equiv 0$ ,  $\psi_2(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [0, r]$ . Тогда найденные выше соотношения (12) и (14) перепишутся соответствующим образом

$$\nu(x) = \gamma_1 D_{0x}^{1-2\beta} \tau(t), \quad (15)$$

$$\nu(x) = \tau'(x). \quad (16)$$

Умножая обе части соотношения (16) на функцию  $\tau(x)$ , а затем интегрируя полученное равенство по  $x$  от 0 до  $r$  с учетом условий согласования  $\tau(0) = \psi_1(0)$ ,  $\tau(r) = \psi_2(r)$ , найдем

$$J = \int_0^r \tau(x) \nu(x) dx = \int_0^r \tau(x) \tau'(x) dx = 0.$$

С другой стороны, с учетом последнего равенства, после аналогичных действий из (15) найдем

$$J = \int_0^r \tau(x) \nu(x) dx = \gamma_1 \int_0^r \tau(x) D_{0x}^{1-2\beta} \tau(t) dx = 0. \quad (17)$$

Согласно теореме о положительности оператора  $D_{cx}^\alpha$  дробного (в смысле Римана-Лиувилля) дифференцирования [11, с. 46] равенство (17) может иметь место в том и только в том случае, когда когда  $\tau(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [0, r]$ . Но тогда из (15) и (16) следует, что и  $\nu(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [0, r]$ . При этом из формул (9) и (13) следует, что и  $u(x, y) \equiv 0 \quad \forall (x, y) \in \overline{\Omega}$ .

Теорема 1 доказана.

**Теорема о существовании регулярного решения задачи 3.** Справедлива

**Теорема 2.** Пусть заданные функции  $f(x, y)$ ,  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$  обладают теми свойствами, что

$$f(x, y) \in C(\overline{\Omega_2}), \quad (18)$$

$$\psi_1(x) \in C[0, r] \cap C^3[0, r], \quad (19)$$

$$\psi_2(x) \in C^2[0, r] \cap C^3[0, r], \quad (20)$$

причем  $\psi'_1(0)$  может обращаться в бесконечность порядка ниже  $2\beta$ ;  $\psi'_1(r)$  – в бесконечность порядка ниже  $1 - \beta$ ;  $\psi''_1(0)$  – в бесконечность порядка ниже 1, а  $\psi''_1(r)$  – в бесконечность порядка ниже  $\beta$  и выполнено условие согласования

$$\psi_2(r) = F(r) + \gamma_1 \int_0^r (r-t)^{2\beta-1} E_{\frac{1}{2\beta}}(\gamma_1(r-t)^{2\beta}; 2\beta) F(t) dt,$$

$$\text{где } F(x) = 2\psi_2(x) - 2\psi_2(0) + \psi_1(0) - \gamma_2 \int_0^x t^\beta D_{0t}^{1-\beta} \psi_1(s) dt + \int_0^x \int_0^{\frac{r-t}{2}} f(t+s, s) ds dt;$$

$$E_\rho(z, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu+n\rho-1)} \text{ – функция типа Миттаг-Леффлера [13, с. 117].}$$

Тогда существует регулярное в области  $\Omega$  решение задачи 3.

**Доказательство.** Для доказательства теоремы 2 вернемся к найденным выше фундаментальным соотношениям (12) и (14). Исключая из (12) и (14) искомую функцию  $\nu(x)$ , относительно функции  $\tau(x)$  приходим к следующей задаче для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, содержащего производную дробного порядка в младших членах

$$\tau'(x) - \gamma_1 D_{0x}^{1-2\beta} \tau(t) = 2\psi'_2(x) - \gamma_2 x^\beta D_{0x}^{1-\beta} \psi_1(t) + \int_0^{\frac{r-x}{2}} f(x+t, t) dt, \quad 0 < x < r, \quad (21)$$

$$\tau(0) = \psi_1(0). \quad (22)$$

Интегрируя уравнение (21) по  $x$  от 0 до  $x$ , с учетом (22), придем к соответствующему задаче (21)-(22) интегральному уравнению вида

$$\tau(x) - \frac{\gamma_1}{\Gamma(2\beta)} \int_0^x (x-t)^{2\beta-1} \tau(t) dt = F(x). \quad (23)$$

Уравнение (23) есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода с ядром  $K(x, t) = \frac{(x-t)^{2\beta-1}}{\Gamma(2\beta)}$  и правой частью  $F(x)$ . Функции  $K_n(x, t) = \frac{(x-t)^{2n\beta+2\beta-1}}{\Gamma(2n\beta+2\beta)}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  являются итерированными ядрами ядра  $K(x, t)$ , а функция

$$R(x, t; \gamma_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_1^n K_n(x, t) = (x-t)^{2\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\gamma_1(x-t)^{2\beta}]^n}{\Gamma(2\beta+2n\beta)} = (x-t)^{2\beta-1} E_{\frac{1}{2\beta}}(\gamma_1(x-t)^{2\beta}; 2\beta)$$

есть резольвента ядра  $K(x, t)$ . С помощью резольвенты  $R(x, t; \gamma_1)$  ядра  $K(x, t)$  решение уравнения (23), а, следовательно, решение задачи (21)-(22) запишется по формуле

$$\tau(x) = F(x) + \gamma_1 \int_0^x (x-t)^{2\beta-1} E_{\frac{1}{2\beta}}(\gamma_1(x-t)^{2\beta}; 2\beta) F(t) dt.$$

После того как функция  $\tau(x)$  найдена, функцию  $\nu(x)$  можно найти из соотношений

(12) или (14). Тогда решение исследуемой задачи 3 в области  $\Omega_1$  дается по формуле (9), а в области  $\Omega_2$  решение задачи (8) для уравнения (3) выписывается по формуле (13).

**Теорема об однозначной разрешимости задачи 4.** Переходим к исследованию задачи 4. Здесь справедлива следующая

**Теорема 3.** Пусть заданные функции  $f(x, y)$ ,  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$  обладают перечисленными выше свойствами (18), (19), (20), причем  $\psi'_1(0)$  может обращаться в бесконечность порядка ниже  $1 - \beta$ ;  $\psi'_1(r)$  – в бесконечность порядка ниже  $2\beta$ ;  $\psi''_1(0)$  – в бесконечность порядка ниже  $\beta$ , а  $\psi''_1(r)$  – в бесконечность порядка ниже 1 и выполнено условие согласования

$$\psi_2(0) = F_1(0) - \gamma_1 \int_0^r t^{2\beta-1} E_{\frac{1}{2\beta}}(-\gamma_1 t^{2\beta}; 2\beta) F_1(t) dt,$$

$$\text{зде } F_1(x) = 2\psi_2(x) - 2\psi_2(r) + \psi_1(r) - \gamma_2 \int_x^r (r-t)^\beta D_{rt}^{1-\beta} \psi_1(s) dt + \int_x^r \int_0^{\frac{t}{2}} f(t-s, s) ds dt.$$

Тогда существует единственное регулярное в области  $\Omega$  решение задачи 4.

**Доказательство.** Действительно, удовлетворяя (13) условию (5) с последующим дифференцированием полученного равенства, найдем

$$\nu(x) = -\tau'(x) + 2\psi'_2(x) - \int_0^{\frac{x}{2}} f(x-t, t) dt. \quad (24)$$

А из (9) при условии (6) после некоторых преобразований будем иметь

$$\nu(x) = \gamma_1 D_{rx}^{1-2\beta} \tau(t) - \gamma_2 (r-x)^\beta D_{rx}^{1-\beta} \psi_1(t). \quad (25)$$

Исключая из (24) и (25) искомую функцию  $\nu(x)$ , с учетом (6) и (8), приходим к следующей задаче относительно  $\tau(x)$

$$\tau'(x) + \gamma_1 D_{rx}^{1-2\beta} \tau(t) = \gamma_2 (r-x)^\beta D_{rx}^{1-\beta} \psi_1(t) + 2\psi'_2(x) - \int_0^{\frac{x}{2}} f(x-t, t) dt, \quad 0 < x < r, \quad (26)$$

$$\tau(r) = \psi_1(r). \quad (27)$$

Решение задачи (26), (27) выписывается по формуле

$$\tau(x) = F_1(x) - \gamma_1 \int_x^r (t-x)^{2\beta-1} E_{\frac{1}{2\beta}}(-\gamma_1 (t-x)^{2\beta}; 2\beta) F_1(t) dt.$$

Как и при исследовании предыдущей задачи 3, после нахождения функции  $\tau(x)$ , функцию  $\nu(x)$  можно найти из соотношений (24) или (25). Стало быть, решение исследуемой задачи 4 в области  $\Omega_1$  выписывается по формуле (9), а в области  $\Omega_2$  решение задачи Коши (8) для уравнения (3) находится по формуле (13).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кальменов Т.Ш. Критерий непрерывности решения задачи Гурса для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, №1. С. 41–55.
2. Балкизов Ж.А. Краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Известия Высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия Естественные науки. 2016. №1(189). С. 5–10.
3. Балкизов Ж.А. Первая краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Владикавказский математический журнал. 2016. Т. 18, № 2. С. 19–30.
4. Кумыкова С.К., Нахушева Ф.Б. Об одной краевой задаче для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 1. С. 50–65.
5. Салахутдинов М.С., Мирсабуров М. О некоторых краевых задачах для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 1. С. 129–136.
6. Салахутдинов М.С., Мирсабуров М. О двух нелокальных краевых задачах для вырождающегося гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 116–127.
7. Ефимова С.В., Репин О.А. Задача с нелокальными условиями на характеристиках для уравнения влагопереноса // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 10. С. 1419–1422.
8. Репин О.А. О задаче с операторами М. Сайго на характеристиках для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико-математические науки. 2006. № 43. С. 10–14.
9. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. М.: Издательство Академии наук СССР, 1959. 164 с.
10. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа, 1985. 304 с.
11. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
12. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
13. Джербашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.

## ABSTRACT

Within the framework of this work, solutions of boundary value problems with data on “opposite” (“parallel”) characteristics are found for one mixed-hyperbolic equation consisting of a wave operator in one part of the domain and a degenerate hyperbolic Gellerstedt operator in the other part. It is known that problems with data on opposite (parallel) characteristics for the wave equation in the characteristic quadrangle are posed incorrectly. However, as shown in this paper, the solution of similar problems for a mixed-hyperbolic equation consisting of a wave operator in one part of the domain and a degenerate hyperbolic Gellerstedt operator with an order of degeneracy in the other part of the domain, under certain conditions on the given functions, exists, is unique and is written explicitly.

**Keywords:** wave equation, degenerate hyperbolic equation, Volterra equation, Tricomi method, method of integral equations, methods of the theory of fractional calculus.

## АННОТАЦИЯ

В работе исследованы краевые задачи с данными на противоположных характеристиках для одного смешанно-гиперболического уравнения второго порядка, состоящего из волнового оператора в одной части области и с вырождающимся гиперболическим оператором Геллерстедта в другой части. Известно, что задачи с данными на противоположных (параллельных) характеристиках для волнового уравнения в характеристическом четырехугольнике поставлены некорректно. Однако, как показано в данной работе, решение аналогичных задач для смешанно-гиперболического уравнения с волновым оператором в одной части области и вырождающимся гиперболическим оператором Геллерстедта с порядком вырождения  $m > 0$  в другой части области, при определенных условиях на заданные функции, существует, единственno и записывается в явном виде.

**Ключевые слова:** волновое уравнение, вырождающееся гиперболическое уравнение, уравнение Вольтерра, метод Трикоми, метод интегральных уравнений, методы теории дробного исчисления.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик; giraslan@yandex.ru

© Ж.А. Балкизов, 2020