УДК 517.954
DOI: 10.47928/1726-9946-2020-20-1-9-14

Априорная оценка решения нелокальной краевой задачи для уравнения Маккендрика – фон Фёрстера дробного порядка

Березгова Р.З.

Представлено академиком АМАН Шхануковым – Лафишевым М.Х.

Для большинства задач экологии актуальной остается проблема построения и практического использования математических моделей динамики возрастной структуры популяции. Построение таких моделей и их исследование является необходимым условием для решения важных прикладных задач оптимального управления популяциями.

Для исследования динамики численности популяции с учетом возрастной структуры широко применяют непрерывные модели. Непрерывные модели оперируют не с численностями отдельных групп, а с непрерывной функцией распределения особей по возрастам. Возрастная структура важная характеристика популяции, влияющая на рождаемость и смертность. По возрастному спектру оцениваются способность популяции к самоподдержанию численности и её устойчивость к внешним воздействиям. Для рационального использования природных ресурсов, например, «сбор урожая» (изъятие из популяции) животных или растений, необходимо учитывать возрастную структуру популяции. Впервые в работе А. Маккендрика [1] было получено известное уравнение неразрывности. Так как работа А. Маккендрика не была известной, фон Фёрстером в [2] вновь было получено уравнение Маккендрика и дополнено граничным условием (уравнением рождаемости). Уравнение теперь носит название уравнения Маккендрика – фон Фёрстера.

В настоящее время наблюдается глубокое внедрение аппарата дробного исчисления в математическое моделирование биологических процессов. Определение дробной производной, в отличие от целой, даётся нелокально, как интеграл от предыстории, поэтому может быть применено для моделирования сред с памятью. На состояние многих биологических систем в данный момент времени существенное влияние оказывает последовательность ее предшествующих состояний. С помощью операции обобщенного дробного интегрирования [3, с. 109-111] можно осуществить учет влияния биологического явления последействия на численность популяции или на ее биомассу.

В данной работе методом энергетических неравенств получена априорная оценка решения нелокальной краевой задачи для обобщенного уравнения Маккендрика – фон Фёрстера с оператором Капуто по временной переменной.

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ рассмотрим следующее уравнение

$$\partial_{0t}^{\alpha} u + u_x + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

где ∂_{0t}^{α} – оператор Капуто порядка $\alpha \in]0,1]$ [4, с. 11]. При $\alpha = 1$ уравнение (1) в математической биологии принято называть уравнением неразрывности Маккендрика – фон Фёрстера [3, с. 244]. Функция $u = u(x,t)$ интерпретируется как численность популяции возраста $x \in [0,l]$ в момент времени $t \in [0,T]$; $c(x,t)$ – коэффициент смертности, который является неотрицательной величиной; $f(x,t)$ характеризует различные демографические процессы.

К уравнению (1) присоединим уравнение рождаемости

$$u(0,t) = \int\limits_0^l \beta(\xi,t)u(\xi,t)d\xi, \quad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

где l – предельный возраст, $\beta(x,t)$ – коэффициент рождаемости, принадлежащий классу $C([0,l]\times[0,T])$.

Для того чтобы изучить динамику возрастной структуры популяции, нужно задать еще начальное условие

$$u(x,0) = \tau(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{3}$$

где $\tau(x)$ – это начальное распределение популяции по возрастам, которое непрерывно на $[0,l]$.

Определение. Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u = u(x,t)$ из класса $C(\overline{\Omega})$, $u(x,t)$ непрерывно дифференцируема по x, а $\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t) \in C(\Omega)$, $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) в области Ω.

Задача 1. *Найти регулярное всюду в области* Ω, *решение* $u(x,t)$ *уравнения (1), непрерывное в* $\overline{\Omega}$ *и удовлетворяющее следующим условиям (2), (3).*

Из (2) и (3) вытекает, что условие

$$\int\limits_0^l \beta(\xi,0)\tau(\xi)d\xi = \tau(0) \tag{4}$$

является необходимым условием разрешимости задачи (1)–(3).

Уравнение (1) было исследовано многими авторами. В работах [5]-[15] рассматривается обобщенное уравнение Маккендрика – фон Фёрстера. Уравнение неразрывности обобщено введением оператора дробного интегро-дифференцирования (в смысле Римана – Лиувилля) по временной и пространственной переменных. В [5] построено фундаментальное решение, доказаны некоторые оценки и исследована гёльдерова гладкость решений в зависимости от краевых условий и правой части. В работах Псху А.В. [6]-[8] исследована краевая задача для обобщенного уравнения неразрывности, когда $c(x,t) = 0$, $c(x,t) = \lambda$, где λ спектральный параметр, доказаны существование и единственность решения и получено его явное представление в терминах специальной функции типа Райта. В работах [9]-[10] для уравнения с переменными коэффициентами (1), обобщенного оператором Римана – Лиувилля по временной переменной, доказана теорема об однозначной разрешимости краевой задачи в прямоугольной области, доказаны теоремы существования и единственности решения задачи Коши в нелокальной постановке. В [11] исследуется краевая задача для уравнения в частных производных дробного порядка, не превосходящего единицу, в области с криволинейной границей. В работах [12]-[15] для обобщенного уравнения Маккендрика – фон Фёрстера с операторими Джрбашяна – Нерсесяна были исследованы нелокальные краевые задачи, в том числе задача с интегральным условием. Для исследованных уравнений были построены фундаментальные решения, в терминах функции Райта, и выписаны явные представления решений краевых задач. В работах [16]-[17] для уравнения (1) при $\alpha = 1$ были рассмотрены нелимитированная и лимитированная популяционные модели динамики возрастной структуры популяции. В работе [18] найдено решение нагруженного обобщенного уравнения Маккендрика - фон Фёрстера (1) с нелокальным краевым условием путем сведения к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода. В [19] рассмотрена нелокальная краевая задача для обобщенного уравнения Маккендрика – фон Фёрстера, доказано существование и единственного регулярного решения поставленной задачи.

Пусть решение $u(x,t) \in C(\overline{\Omega})$. Введем обозначения:

$$||u||_0^2 = \int\limits_0^l u^2(x,t)dx, \quad D_{0t}^{\alpha}u(x,t) = \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}u(x,\tau)d\tau/\Gamma(\alpha).$$

Умножим уравнение (1) на $u(x,t)$ и проинтегрируем по x от 0 до l:

$$\int\limits_0^l u(x,t)\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t)dx + \int\limits_0^l u(x,t)u_x(x,t)dx+$$

$$+\int\limits_0^l u(x,t)c(x,t)u(x,t)dx = \int\limits_0^l u(x,t)f(x,t)dx. \tag{5}$$

Преобразуем слагаемые, входящие в тождество (5).

Пусть $c(x,t) \geq c_0 > 0$, тогда

$$\int\limits_0^l u(x,t)c(x,t)u(x,t)dx = \int\limits_0^l c(x,t)u^2(x,t)dx \geq c_0||u||_0^2.$$

Пусть $|\beta(x,t)| \leq c_1$

$$\int\limits_0^l u(x,t)u_x(x,t)dx = \frac{1}{2}u^2(x,t)|_0^l = \frac{1}{2}u^2(l,t) - \frac{1}{2}u^2(0,t) =$$

$$= \frac{1}{2}u^2(l,t) - \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^l \beta(\xi,t)u(\xi,t)d\xi\right)^2 \geq \frac{1}{2}u^2(l,t) - \frac{1}{2}c_1 l||u||_0^2.$$

$$\left|\int\limits_0^l u(x,t)f(x,t)dx\right| \leq \frac{1}{2}||u||_0^2 + \frac{1}{2}||f||_0^2.$$

Далее воспользуемся следующей

Лемма 1 [20]. *Для любой абсолютно непрерывной на* $[0,T]$ *функции* $v(t)$ *справедливо* *неравенство*

$$v(t)\partial_{0t}^{\alpha}v(t) \geq \frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}v^2(t), \quad 0<\alpha<1. \tag{6}$$

В силу неравенства (6) получим

$$\int\limits_0^l u(x,t)\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t)dx \geq \int\limits_0^l \frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}u^2(x,t)dx = \frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}||u||_0^2. \tag{7}$$

Тождество (5) с учетом приведенных выше преобразований примет вид

$$\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}||u||_0^2 + \frac{1}{2}u^2(l,t) - \frac{1}{2}c_1 l||u||_0^2 \leq \frac{1}{2}||u||_0^2 + \frac{1}{2}||f||_0^2. \tag{8}$$

Домножив (8) на 2 получаем

$$\partial_{0t}^{\alpha}||u||_0^2 + u^2(l,t) \leq (1+c_1 l)||u||_0^2 + ||f||_0^2. \tag{9}$$

Применив к обеим частям неравенства (9) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$ приходим к следующему неравенству

$$||u||_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}u^2(l,t) \leq (1+c_1 l)D_{0t}^{-\alpha}||u||_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}||f||_0^2 + ||\tau||_0^2. \tag{10}$$

Приведем обобщенную лемму Гронуолла – Беллмана [20]

Лемма 2 [20]. *Пусть неотрицательная абсолютно непрерывная функция $y(t)$ удовлетворяет для почти всех t из $[0,T]$ неравенству*

$$\partial_{0t}^{\alpha}y(t) \leq c_1 y(t) + c_2(t), \quad 0<\alpha\leq 1,$$

где $c_1>0$, $c_2(t)$ – суммируемая на [0,T] неотрицательная функция. Тогда

$$y(t) \leq y(0)E_{\alpha}(c_1 t^{\alpha}) + \Gamma(\alpha)E_{\alpha,\alpha}(c_1 t^{\alpha})D_{0t}^{-\alpha}c_2(t),$$

где $E_{\alpha}(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)}$, $E_{\alpha,\mu}(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\mu)}$ – функции Миттаг – Леффлера.

Отбросив второе слагаемое в левой части неравенства (10) и воспользовавшись леммой 2, где $y(t)=D_{0t}^{-\alpha}||u||_0^2$, $\partial_{0t}^{\alpha}y(t)=||u(x,t)||_0^2$, $y(0)=0$, приходим к неравенству

$$||u||_0^2 \leq (1+c_1 l)D_{0t}^{-\alpha}||u||_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}||f||_0^2 + ||\tau||_0^2. \tag{11}$$

Теорема. *Если выполнены условия $c(x,t)\geq c_0>0$, $|\beta(x,t)|\leq c_1$ $f(x,t)\in C(\overline{\Omega})$ всюду на $\overline{\Omega}$, то для решения $u(x,t)$ задачи (1)-(3) справедлива априорная оценка*

$$||u||_0^2 \leq M(D_{0t}^{-\alpha}||f||_0^2 + ||\tau||_0^2), \tag{12}$$

где $M=const$.

Из априорной оценки (12) следует единственность и непрерывная зависимость решения задачи (1)-(3) от входных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *McKendrick A.G.* Applications of mathematics to medical problems // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 1926, vol. 44, № 1, pp. 98–130.
2. *Von Foerster H.* Some remarks on changing populations // In: F. Stohlman (Ed.), The Kinetics of Cellular Proliferation. New York: Grune and Stratton, 1959, pp. 382–407.
3. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
4. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
5. *Cl'ement Ph., Gripenberg G., Londen S-O.* Schauder estimates for equations with fractional derivatives // Transactions of the American Mathematical Society, 2000, vol. 352, № 5, pp. 2239–2260.
6. *Псху А.В.* Решение краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка // Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2000. Т. 5, № 1. С. 45–53.
7. *Псху А.В.* Краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка // Известия КБНЦ РАН. 2002. № 1(8). С. 76–78.
8. *Псху А.В.* Решение краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 8. С. 1092–1099.
9. *Мамчуев М.О.* Краевая задача для уравнения первого порядка с частной производной дробного порядка с переменными коэффициентами // Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2009. Т. 11, № 1. С. 32–35.
10. *Мамчуев М.О.* Задача Коши в нелокальной постановке для уравнения первого порядка с частной производной дробного порядка с переменными коэффициентами // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2009. Т. 11, № 2. С. 21–24.
11. *Псху А.В.* О краевой задаче для уравнения в частных производных дробного порядка в области с криволинейной границей // Дифференц. уравн. 2015. Т. 51, № 8. С. 1076–1082.
12. *Богатырева Ф.Т.* Краевая задача для уравнения в частных производных первого порядка с оператором Джрбашяна – Нерсесяна // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т. 15, № 1. С. 9–16.
13. *Богатырева Ф.Т.* Краевая задача для уравнения в частных производных с оператором дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. Академии наук. 2015. Т. 17, № 2. С. 17–24.
14. *Богатырева Ф.Т.* Краевая задача с интегральным условием самарского для уравнения в частных производных первого порядка // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2017. № 6-1 (80). С. 10–14.
15. *Богатырева Ф.Т.* Краевая задача для уравнения в частных производных с оператором дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2018. № 6 (86). С. 10–14.
16. *Кайгермазов А.А., Кудаева Ф.Х.* Об одной математической модели динамики возрастной структуры // Естественные и математические науки в современном мире. 2014. № 25. С. 17–26.

17. *Сайег Т.Х., Кайгермазов А.А., Кудаева Ф.Х.* Об одной математической модели динамики численности популяции с возрастной структурой // Актуальные проблемы современной науки: сборник IV Международной научно-практической конференции. 2015. С. 271–275.
18. *Березгова Р.З.* Об одной нелокальной краевой задаче для нагруженного уравнения Маккендрика – фон Фёрстера с оператором Капуто // Вестник КРАУНЦ: Физ.-мат. науки. 2017. № 3(19). С. 5–9. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-19-3-5-9
19. *Лосанова Ф.М., Кенетова Р.О.* Нелокальная задача для обобщенного уравнения Маккендрика – фон Фёрстера с оператором Капуто // Нелинейный мир. 2018. Т. 16, № 1. С. 49–53.
20. *Алиханов А.А.* Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 5. С. 658–664.

ABSTRACT

In this paper, by the method of energy inequalities, an a priori estimate for the solution of the nonlocal boundary value problem is obtained for the generalized Mackendrick – von Foerster equation with the Caputo operator with respect to the time variable.

Key words. McKendrick – von Foerster equation, Caputo operator, prior estimate, nonlocal boundary value problem.

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik; berezgova.rita@gmail.com

АННОТАЦИЯ

В данной работе методом энергетических неравенств получена априорная оценка решения нелокальной краевой задачи для обобщенного уравнения Маккендрика – фон Фёрстера с оператором Капуто по временной переменной.

Ключевые слова. Уравнение Маккендрика – фон Фёрстера, оператор Капуто, априорная оценка, нелокальная краевая задача.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик;
berezgova.rita@gmail.com