УДК 517.925.4
DOI: 10.47928/1726-9946-2020-20-1-15-20

Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с оператором непрерывно распределенного дифференцирования

Эфендиев Б.И.

Представлено академиком АМАН Псху А.В.

1. Введение. В интервале $0 < x < l$ рассмотрим уравнение

$$u''(x) - \int\limits_0^1 \mu(\alpha) D_{0x}^{\alpha} u(x) d\alpha = f(x), \tag{1}$$

где

$$D_{0x}^{\alpha} u(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^{\alpha+1}}, \qquad \alpha < 0,$$

$$D_{0x}^{\alpha} u(x) = u(x), \qquad \alpha = 0,$$

$$D_{0x}^{\alpha} u(x) = \frac{d^n}{dx^n} D_{0x}^{\alpha-n} u(x), \qquad n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N}$$

– оператор дробного интегродифференцирования (в смысле Римана – Лиувилля) порядка α [1, 2], $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, $\mu(\alpha)$, $f(x)$ – заданные функции.

Уравнение (1) относится к классу непрерывных дифференциальных уравнений [1, 2]. В последнее время интегральный оператор в уравнении (1) называют оператором непрерывно распределенного дифференцирования, который был введен в работе [1].

При $\mu(\alpha) = 1$ интеграл в уравнении (1) обозначается так:

$$D_{ax}^{[\gamma,\delta]} u(x) = \int\limits_{\gamma}^{\delta} D_{ax}^{\alpha} u(x) d\alpha. \tag{2}$$

В работе [2] были изучены свойства оператора (2), в частности, доказана положительность оператора непрерывного интегродифференцирования, получена формула непрерывного интегрирования по частям. В работе [3] построен оператор, обращающий оператор (2) и получены аналоги формулы Ньютона-Лейбница.

Уравнение

$$\int\limits_0^1 \mu(\alpha) \partial_{0x}^{\alpha} u(x) d\alpha = \lambda u(x), \qquad \partial_{0x}^{\alpha} u(x) = D_{0x}^{\alpha-1} u'(x) \tag{3}$$

с дробной производной Герасимова – Капуто исследовалось в статье [4], для которого получено фундаментальное решение, изучено его поведение на бесконечности и в окрестности нуля, решена задача Коши, а в работе [5] для уравнения вида (3) изучена задача Коши в банаховом пространстве с линейным ограниченным оператором в правой части.

Для уравнения (1) при $\mu(\alpha) = 1$ построено фундаментальное решение и найдены решения начальной и краевой задач [6, 7].

2. Обозначения. Пусть $\mu(\alpha) \in L[0,1]$. Далее будем обозначать через

$$(g * h)(x) = \int\limits_0^x g(x-t)h(t)dt$$

свертку Лапласа функций $g(x)$ и $h(x)$,

$$k_1(x) = \int\limits_0^1 \mu(\alpha)\frac{x^{-\alpha}d\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}, \qquad k(x) = \int\limits_0^1 \mu(\alpha)\frac{x^{1-\alpha}d\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}. \tag{4}$$

3. Фундаментальное решение. *Фундаментальным решением* уравнения (1) назовем функцию $g(x)$, которая является решением следующей задачи

$$g''(x) - \int\limits_0^1 \mu(\alpha)D_{0x}^{\alpha}g(x)d\alpha = 0, \tag{5}$$

$$g(0) = 0, \qquad g'(0) = 1. \tag{6}$$

Рассмотрим функцию

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x), \quad w_0(x) = x, \quad w_n(x) = (w_{n-1} * k)(x), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Исследуем сходимость ряда (7). Сначала оценим ядро $k(x)$. Для функции $\varphi(x,\alpha) = x^{1-\alpha}/\Gamma(2-\alpha)$ справедливо соотношение

$$\sup_{0<\alpha<1, 0<x<l} \varphi(x,\alpha) = C < \infty,$$

с учетом которого имеем что

$$|k(x)| \leq C\int\limits_0^1 |\mu(\alpha)|d\alpha = C\overline{\mu} = c. \tag{8}$$

В силу оценки (8) из формулы (7) имеем неравенства

$$|w_n(x)| \leq \frac{c^n x^{n+1}}{\Gamma\big(n+2\big)}, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{9}$$

из которых следует равномерная сходимость ряда (7). С помощью неравенств (9) получим оценку для функции $W(x)$

$$|W(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n x^{n+1}}{\Gamma\big(n+2\big)} = \frac{e^{cx}-1}{c}. \tag{10}$$

Покажем что функция $W(x)$ является решением задачи (5), (6). Из формулы (4) видно, что $k(0)=0$, в силу которого из представления (7) непосредственно вытекают равенства

$$W'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x), \quad v_0(x)=1, \quad v_n(x) = (v_{n-1}*k)(x), \quad n\in\mathbb{N}, \tag{11}$$

$$W''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu_n(x), \quad \nu_0(x)=k(x), \quad \nu_n(x) = (\nu_{n-1}*k)(x), \quad n\in\mathbb{N}, \tag{12}$$

$$W(0)=0, \qquad W'(0)=1, \qquad W''(0)=0. \tag{13}$$

Из оценок (8) и (10) следует равномерная на $[0,l]$ сходимость рядов (11) и (12).

Учитывая определения оператора дробного интегродифференцирования и свертки Лапласа, а также равенств (4), (11) и $W(0)=0$, получим

$$\int\limits_0^1 \mu(\alpha) D_{0x}^{\alpha} W(x) d\alpha = \frac{d}{dx}\int\limits_0^1 \mu(\alpha) D_{0x}^{\alpha-1} W(x) d\alpha = \frac{d}{dx}\int\limits_0^x W(x-t)\int\limits_0^1 \mu(\alpha)\frac{t^{-\alpha}d\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}dt =$$

$$= \frac{d}{dx}\big(W*k_1\big)(x) = \big(W'*k_1\big)(x) = \big(1*k_1\big)(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\big(v_{n-1}*k*k_1\big)(x). \tag{14}$$

Замечая, что $k(x) = (1*k_1)(x)$, из соотношения (14) имеем что

$$\int\limits_0^1 \mu(\alpha) D_{0x}^{\alpha} W(x) d\alpha = k(x) + \big(k*k\big)(x) + \big(k*k*k\big)(x) + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \nu_n(x) = W''(x). \tag{15}$$

Из формулы (15) следует, что функция $W(x)$ удовлетворяет уравнению (5), а значит, в силу равенств (13), является *фундаментальным решением* уравнения (1).

4. Задача Коши. Регулярным решением уравнения (1) в интервале $]0,l[$ назовем функцию $u(x)$, принадлежащую классу $C[0,l]\cap C^2]0,l[$ и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $x\in]0,l[$.

Задача. *Найти регулярное решение $u(x)$ уравнения (1) в интервале $]0,l[$, удовлетворяющее условиям*

$$u(0)=u_0, \quad u'(0)=u_1, \tag{16}$$

где u_0, u_1 – заданные константы.

Теорема. *Пусть $f(x)\in L[0,l]\cap C\,]0,l[$. Тогда существует единственное регулярное* *решение задачи (1), (16). Решение имеет вид*

$$u(x) = u_0W'(x) + u_1W(x) + \big(W * f\big)(x). \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $u(x)$ – регулярное решение уравнения (1). Умножим обе части уравнения (1) на функцию $W(x-t)$, предварительно поменяв в нем переменную x на t, и проинтегрируем от 0 до x. Тогда получим

$$\int\limits_0^x W(x-t)u''(t)dt - \int\limits_0^x W(x-t)\int\limits_0^1 \mu(\alpha)D_{0t}^{\alpha}u(t)d\alpha dt = \int\limits_0^x W(x-t)f(t)dt$$

или же, с учетом определения свертки Лапласа и равенства (14)

$$\big(W * u''\big)(x) - \big(W * (u * k_1)'\big)(x) = \big(W * f\big)(x). \tag{18}$$

Применяя формулу дифференцирования свертки Лапласа

$$\big(g * h^{(n)}\big)(x) = \big(g^{(n)} * h\big)(x) + \sum_{k=0}^{n} g^{(n-1-k)}(0)h^{(k)}(x) - \sum_{k=0}^{n} h^{(n-1-k)}(0)g^{(k)}(x)$$

имеем

$$\begin{aligned}&\big(W'' * u\big)(x) - u(0)W'(x) - u'(0)W(x) + W(0)u'(x) + W'(0)u(x) -\\ &-\big(W' * k_1 * u\big)(x) + \big(u * k_1\big)(0)W(x) + W(0)\big(u * k_1\big)(x) = \big(W * f\big)(x).\end{aligned} \tag{19}$$

В силу формулы (4), непрерывности функции $u(x)$ получим что $\big(u*k_1\big)(0) = 0$. Отсюда учитывая формулы (13) и (16) из равенства (19) имеем

$$\big[(W'' - W' * k_1) * u\big](x) - u_0W'(x) - u_1W(x) + u(x) = \big(W * f\big)(x).$$

Из соотношений (14) и (15) следует, что $W''(x) - (W' * k_1)(x) = 0$, в силу которого из последнего равенства получим представление (17).

Покажем теперь, что функция $u(x)$, определяемая формулой (17), действительно является решением задачи (1), (16). Дифференцируя обе части формулы (17), принимая во внимание равенство $W(0) = 0$ и формулу дифференцирования свертки Лапласа, получим

$$u'(x) = u_0W''(x) + u_1W'(x) + \big(W' * f\big)(x). \tag{20}$$

Учитывая соотношения (13) из формул (17) и (20) при $x \to 0$ получим, что $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$. Вторая производная от функции $u(x)$ в силу равенств (13) и формулы дифференцирования свертки Лапласа имеет вид

$$u''(x) = u_0W'''(x) + u_1W''(x) + \big(W'' * f\big)(x) + f(x). \tag{21}$$

Из представления (17), в силу определения и свойств оператора дробного интегродифференцирования имеем, что

$$\int_0^1 \mu(\alpha) D_{0x}^{\alpha} u(x) d\alpha = u_0 \int_0^1 \mu(\alpha) D_{0x}^{\alpha} W'(x) d\alpha + u_1 \int_0^1 \mu(\alpha) D_{0x}^{\alpha} W(x) d\alpha + \int_0^1 \mu(\alpha) D_{0x}^{\alpha} \big(W * f\big)(x) d\alpha. \tag{22}$$

Подставляя выражения (21) и (22) в уравнение (1), в силу равенства (15), получаем, что функция, определяемая формулой (17), действительно является решением задачи (1), (16).

Так как все функции, входящие в правую часть (17), непрерывны на $[0, l]$, то решение $u(x) \in C[0, l]$. Из равенств (21) и (22), аналогичным образом, можно заключить, что

$$u''(x), \quad \int_0^1 \mu(\alpha) D_{0x}^{\alpha} u(x) d\alpha \in C\,]0, l[.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А.М.* О непрерывных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 4. С. 796–799.
2. *Нахушев А.М.* О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 101–109.
3. *Псху А.В.* К теории оператора интегро-дифференцирования континуального порядка // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 1. С. 120–127.
4. *Kochubei A.N.* Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion // J. Math. Anal. Appl. 2008, **340**, pp. 252–281.
5. *Fedorov V.E., Streletskaya E.M.* Initial-value problems for linear distributed-order differential equations in banach spaces // Electronic Journal of Differential Eq., 2018, № 176, pp. 1–17.
6. *Эфендиев Б.И.* Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с континуальной производной // Дифференц. уравн. 2011. Т. 47, № 9. С. 1364–1368.
7. *Эфендиев Б.И.* Задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с континуальной производной // Мат. заметки. 2015. Т. 97, № 4. С. 620–628.

ABSTRACT

In this paper, we construct the fundamental solution for ordinary second-order differential equation with continuously distributed differentiation operator. With the help of fundamental solution the solution of the Cauchy problem is written out.

Keywords. fractional Riemann – Liouville integral, fractional Riemann – Liouville derivative, fractional Gerasimov – Caputo derivative, operator of continuously distributed differentiation, fundamental solution, Cauchy problem.

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik; beslan_efendiev@mail.ru

АННОТАЦИЯ

В работе для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с оператором непрерывно распределенного дифференцирования строится фундаментальное решение, с помощью которого выписывается решение задачи Коши.

Ключевые слова. дробный интеграл Римана – Лиувилля, дробная производная Римана – Лиувилля, дробная производная Герасимова – Капуто, оператор непрерывно распределенного дифференцирования, фундаментальное решение, задача Коши.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик;
beslan_efendiev@mail.ru