УДК 517.9
DOI: 10.47928/1726-9946-2020-20-3-14-18

Внутреннекраевая задача для уравнения дробной диффузии

Лосанова Ф.М.

Представлено академиком АМАН Псху А.В.

1. Введение. Изучение прикладных задач, изучающих математические модели физических и геофизических процессов во фрактальных средах в последнее время сопровождается применением операторов дробного интегрирования и дифференцирования [1].

Наличие оператора дробного дифференцирования сказывается в том, что он в любой момент времени влияет на характер (скорости, ускорения и т.п.) эволюции изучаемых процессов не только в тот же момент времени, но и в последующие, т.е. в дифференциальных уравнениях, описывающих процесс с последействием, появляются члены с запаздыванием по времени y [2, с. 383]. В работе [3] оператору дробного дифференцирования придается вполне конкретный физический смысл. В работе [4] предложена и обоснована новая парадигма фрактальности, базирующаяся на триаде: фракталы, дробные операторы, скейлинг.

В данной работе в области $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < l, 0 < y < T\}$ рассматривается уравнение дробной диффузии вида

$$u_{xx}(x,y) - \partial_{0y}^{\alpha} u(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

где ∂_{0y}^{α} – регуляризованная дробная производная (производная Капуто) порядка α [5, с. 11], $0 < \alpha < 1$.

Уравнению вида (1) посвящено много работ, перечислим некоторые из них. Задача Коши для уравнения диффузии дробного порядка $(0 < \alpha < 1)$ с регуляризованной дробной производной и эллиптическим оператором с коэффициентами, зависящими от пространственных переменных была исследована в работе [6].

В работе [7] для построения фундаментальных решений диффузионных и диффузионно-волновых уравнений дробного порядка с производными Капуто и Римана–Лиувилля были использованы преобразование Лапласа и преобразовние Фурье.

Диффузионно-волновое уравнение было исследовано в работе [8] методами группового анализа, а в работе [9] методом разделения переменных.

Задача Коши и первая краевая задача для дробного уравнения диффузии вида (1) решены в работах [10] и [11] методом редукции к системе уравнений меньшего порядка. Затем методом функции Грина построены решения основных краевых задач в прямоугольной области и решена задача Коши для диффузионно-волнового уравнения с помощью фундаментального решения.

Для уравнения (1) автором в работе [12] было построено решение внутреннекраевой задачи с нелокальным смещением в прямоугольной области, в [13] найдено решение нелокальной краевой задачи с условием Самарского в полуполосе, а в [14] решена задача с локальным смещением. Доказаны теоремы существования и единственности поставленных задач.

Для уравнения (1) были рассмотрены и другие задачи, полный список работ можно найти к примеру в [15]-[17].

В данной работе мы решаем внутреннекраевую задачу для уравнения (1) с условием локального смещения.

2. Постановка задачи и основной результат. Введем понятие регулярного решения.

Решение $u = u(x, y)$ уравнения (1) назовем *регулярным* в области Ω, если выполнены условия $u(x,t) \in C(\overline{\Omega})$, $\partial_{0y}^{\alpha} u(x,y) \in C(\Omega)$.

Задача. *Найти регулярное решение $u(x,y)$ уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющее условиям*

$$u(x,0) = \tau(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

$$u(0,y) + \sum_{i=0}^{n} a_i u(x_i, y) = \varphi(y), \qquad 0 \le y \le T, \tag{3}$$

$$u(l,y) + \sum_{j=0}^{m} b_j u(x_j, y) = \psi(y), \qquad 0 \le y \le T, \tag{4}$$

где a_i, b_j – некоторые произвольные постоянные, $\tau(x)$, $\varphi(y)$, $\psi(y)$ – заданные непрерывные функции.

В 1979 году А.М. Нахушевым была предложена задача для уравнения теплопроводности с внутреннекраевыми условиями вида (3), которое возникает при численной реализации на ЭВМ задачи Самарского [5].

Фундаментальную роль в развитие методов исследования нелокальных краевых и внутреннекраевых задач с условием (3) сыграли работы В.А. Ильина и Е.И. Моисеева [18], [19], где была изучена нелокальная краевая задача первого рода в дифференциальной и разностной трактовках. Нелокальность первого рода проявляется вследствие того, что в граничном условии задается линейная комбинация значений искомой функции. Наиболее подробный анализ работ с условием (3) был проведен в Главе 2 [5].

Сформулируем основной результат.

Теорема. *Пусть $\psi(t), \varphi(t) \in C[0,T]$, $\tau(x) \in C[0,l]$, $f(x,t) \in C(\overline{\Omega})$, $f(x,t)$ удовлетворяет условию Гёльдера по переменной x. Тогда существует единственное регулярное решение уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющее граничным условиям (2)-(4).*

3. Вспомогательные утверждения. Напомним, что решение первой краевой задачи для уравнения (1) с оператором Капуто, как следует из результатов работы [16, гл. 4], имеет вид

$$u(x,y) = \int_0^y u(0,\eta) G_\xi(x,y,0,\eta)\,d\eta - \int_0^y u(l,\eta) G_\xi(x,y,l,\eta)\,d\eta +$$

$$+ \int_0^l \tau(\xi) \left[D_{yt}^{\alpha-1} G(x,y,\xi,t) \right]_{t=0} d\xi - \int_0^y \int_0^l f(\xi,\eta) G(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta, \tag{5}$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta)=\frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x-\xi+2nl|}{(y-\eta)^{\beta}}\right)-e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x+\xi+2nl|}{(y-\eta)^{\beta}}\right)\right],$$

— функция Грина первой краевой задачи, $\beta=\alpha/2$,

$$e^{1,\mu}_{1,\rho}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!\Gamma(\mu-\rho n)}$$

— функция Райта [16, с. 23].

Лемма. *Пусть $x-\xi$, $x+\xi\neq 0,l$, $0<x<l$, $0\leq\xi\leq l$. Тогда для любого $\theta>1$ найдется $C=C(\theta)$, константа не зависящая от x, такая, что будет справедлива оценка*

$$|G_{\xi}(x,y,\xi,\eta)|\leq C(y-\eta)^{\beta\theta-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(|x-\xi|+2nl)^{\theta}}+\frac{1}{(x+\xi+2nl)^{\theta}}\right]. \tag{6}$$

Доказательство. Из неравенства

$$\sup_{0<z<\infty} z^{\theta}e^{1,0}_{1,\beta}(-z)<\infty$$

следует, что для любого положительного θ существует такое $C=C(\theta)$, что имеет место неравенство

$$e^{1,0}_{1,\beta}(-z)\leq C(\theta)z^{-\theta}. \tag{7}$$

Учитывая оценку (7) и, что $0<x<l$, для функции

$$G_{\xi}(x,y,\xi,\eta)=-(y-\eta)^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{1,0}_{1,\beta}\left(-\frac{|x-\xi+2nl|}{(y-\eta)^{\beta}}\right)+e^{1,0}_{1,\beta}\left(-\frac{|x+\xi+2nl|}{(y-\eta)^{\beta}}\right)\right]$$

получаем (6).

4. Доказательство теоремы. Удовлетворим функцию (5) условиям (3) и (4) и после несложных преобразований, получим

$$\begin{cases} u(0,y)+\int\limits_0^y u(0,\eta)K_1(y,\eta)d\eta-\int\limits_0^y u(l,\eta)K_2(y,\eta)d\eta=F_1(y),\\ u(l,y)-\int\limits_0^y u(l,\eta)K_3(y,\eta)d\eta+\int\limits_0^y u(0,\eta)K_4(y,\eta)d\eta=F_2(y),\end{cases} \tag{8}$$

где

$$F_1(y)=\varphi(y)-\sum_{i=0}^{n}a_i\left[\int\limits_0^l\tau(\xi)\left[D^{\alpha-1}_{yt}G(x_i,y,\xi,t)\right]_{t=0}d\xi-\int\limits_0^y\int\limits_0^l f(\xi,\eta)\,G(x_i,y,\xi,\eta)d\xi d\eta\right],$$

$$F_2(y)=\psi(y)-\sum_{j=0}^{m} b_j\left[\int_0^l \tau(\xi)\left[D_{yt}^{\alpha-1}G(x_j,y,\xi,t)\right]_{t=0}d\xi-\int_0^y\int_0^l f(\xi,\eta)\,G(x_j,y,\xi,\eta)d\xi d\eta\right],$$

$$K_1(y,\eta)=\sum_{i=0}^{n} a_iG_\xi(x_i,y,0,\eta),\qquad K_3(y,\eta)=\sum_{j=0}^{m} b_jG_\xi(x_j,y,0,\eta),$$

$$K_2(y,\eta)=\sum_{i=0}^{n} a_iG_\xi(x_i,y,l,\eta),\qquad K_4(y,\eta)=\sum_{j=0}^{m} b_jG_\xi(x_j,y,l,\eta).$$

Система (8) является системой интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода с ядрами $K_i(y)$, где $|K_i(y)|\leq C(y-\eta)^{\beta\theta-1}$.

В силу (6), заключаем, что система интегральных уравнений (8) имеет единственное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений [20, с. 15]. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. *Марри Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. Пер. с англ. В.Г. Бабского М.: Мир, 1983. 399 с.
3. *Рехвиашвили С.Ш.* К определению физического смысла дробного интегро – дифференцирования // Нелинейный мир. 2007. Т. 5, № 4. С. 194–198.
4. *Потапов А.А.* Фрактальный метод, фрактальная парадигма и метод дробных производных в естествознании // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2012. № 5(2). С. 172–180.
5. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
6. *Кочубей А.Н., Эйдельман С.Д.* Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка // Докл. РАН. 2004. Т. 394, № 2. С. 159–161.
7. *Mainardi F.* Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena // Chaos Solitons Fractals, 1996, vol. 7, № 9, pp. 1461–1477.
8. *Luchko Yu., Gorenflo R.* Scale-invariant solutions of a partial differential equation of fractional order // Fract. Calc. Appl. Anal., 1998, vol. 1, № 1, pp. 63–78.
9. *Андреев А.А. , Еремин А.С.* Краевая задача для уравнения диффузии с дробной производной по времени // Математическое моделирование и краевые задачи, Тр. двенадцатой межвуз. конф. Ч. 3, СамГТУ, Самара, 2004. С. 3–9.
10. *Псху А.В.* Решение краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка методом функции Грина // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 10. С. 1430–1433.
11. *Псху А.В.* Решение первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 9. С. 1286–1289.
12. *Лосанова Ф.М.* Задача с нелокальным смещением для уравнения дробной диффузии // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24, № 3. С. 35–40.
13. *Лосанова Ф.М.* Задача с условием Самарского для уравнения дробной диффузии в полуполосе // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2015. № 2(11). С. 17–21.

14. *Лосанова Ф.М.* Задача с локальным смещением для уравнения дробной диффузии// Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 29, № 4. С. 28–34. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-29-4-28-34.
15. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнения в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.
16. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
17. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
18. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Нелокальная краевая задача для оператора Штурма-Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовках // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291, № 3. С. 534–538.
19. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Нелокальная краевая задача второго рода для оператора Штурма-Лиувилля // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23, № 8. С. 1422–1431.
20. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. Москва: Изд-во иностр. лит-ры, 1960. 300 с.

ABSTRACT

In this paper, we prove the existence and uniqueness theorem for a nonlocal boundary value problem for the fractional diffusion equation with boundary conditions presented in the form of linear combinations.

Keywords: fractional diffusion equation, Caputo operator, inner boundary value problem, Green's function, local displacement.

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik; losanovaf@gmail.com

© F.M. Losanova, 2020

АННОТАЦИЯ

В данной работе доказана теорема существования и единственности нелокальной краевой задачи для уравнения дробной диффузии с граничными условиями, представленными в виде линейных комбинаций.

Ключевые слова: уравнение дробной диффузии, оператор Капуто, внутреннекраевая задача, функция Грина, локальное смещение.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик; losanovaf@gmail.com

© Ф.М. Лосанова, 2020