УДК 534.113
DOI: 10.47928/1726-9946-2020-20-3-19-23

Моделирование колебаний балки с одним заделанным и другим свободным концом с применением дробного интегро-дифференцирования

Рехвиашвили С.Ш., Псху А.В. – академик АМАН, Кидакоев А.М.

Методы расчета строительных сооружений и конструкций на прочность, жесткость и устойчивость рассматриваются в строительной механике [1]. Реальный строительный объект, как правило, является достаточно сложным. Поведение такого объекта может зависеть от огромного числа различных внутренних и внешних факторов. Среди таких факторов принято выделять основные и второстепенные. Для описания основных факторов в строительной механике используется понятие математической модели, которая является идеализацией реального сооружения. Математическая модель строится путем схематизации и упрощения физических явлений. К таким моделям, в частности, относятся упругие балки с определенным сечением и различными граничными условиями [2, 3].

В строительстве используются армированные балки, которые обладают повышенной несущей способностью и жесткостью. При колебаниях и нагружении таких балок может иметь место динамический гистерезис (динамическая память, упругое последействие). В нашей работе [4] для учета этого явления предложено использовать дробное интегро-дифференцирование [5–7]. В этом случае степенная функция памяти по временной переменной представляет собой ядро интегро-дифференциального оператора, который определяет "дробную инерцию". Следует также отметить, что впервые дробное интегро-дифференцирование к расчету колебаний балок было применено в [8, 9].

В настоящей работе в рамках подхода, предложенного в [4], проводится моделирование упругих колебаний балки с одним заделанным и другим свободным концом. Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ имеется изгиб с профилем $\varphi(x)$. В области $\Omega =]0, l[\times]0, T[$ решается задача:

$$\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial^4}{\partial x^4}\right) u(x,t) = 0 \qquad (1 < \alpha < 2), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u_{xx}(l,t) = u_{xxx}(l,t) = 0 \qquad (0 < t < T), \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = 0 \qquad (0 < x < l), \tag{3}$$

где l — длина балки, α — порядок дробной производной, который характеризует затухание колебаний [4, 10–12]. Дробное дифференцирование в (1) понимается в смысле производной Капуто

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\, u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t u_{ss}(x,s)\,(t-s)^{1-\alpha} ds.$$

В (1) использованы безразмерные время t и координата x; эти переменные отнесены к параметрам τ и $\sqrt[4]{EJ\tau^2/(\rho S)}$, где E и ρ — модуль Юнга и плотность материала, S и J —

площадь и момент инерции поперечного сечения балки, τ — характерное время процесса, например, время релаксации колебаний.

Решение задачи (1) – (3) будем искать в виде

$$u\,(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \; E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k^4 \; t^\alpha\right) \; v_k\,(x), \tag{4}$$

$$E_{\alpha,\mu}\,(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\,(\alpha k + \mu)},$$

где $E_{\alpha,\mu}\,(z)$ — функция Миттаг-Леффлера. В (4) λ_k и $v_k(x)$ определяются как решение спектральной задачи

$$v_k^{(4)}\,(x) - \lambda_k v_k\,(x) = 0, \tag{5}$$

$$v_k\,(0) = v_k'\,(0) = v''{}_k\,(l) = v'''{}_k\,(l) = 0. \tag{6}$$

Примем обозначение

$$w\,(x,\lambda) = \frac{1}{2\lambda^3}\,(\mathrm{sh}\lambda x \; - \sin\lambda x \;)\,.$$

Можно показать, что решение задачи (5) может быть представлено в виде

$$v_k\,(x) = w_{xxx}\,(l,\lambda_k)\, w\,(x,\lambda_k) - w_{xx}\,(l,\lambda_k)\, w_x\,(x,\lambda_k)\,,$$

где λ_k — положительные корни уравнения

$$\mathrm{ch}\lambda_k l \;\; \cdot \cos\lambda_k l \;\; = -1,$$

пронумерованные в порядке возрастания, начиная с $k = 0$.

При больших k имеет место асимптотическая формула

$$\lambda_k \approx \frac{\pi}{2l}\,(2k+1)\,. \tag{7}$$

Методом Ньютона были численно определены первые несколько корней уравнения (7). Сравнение этих расчетов с расчетами по формуле (7) показывает, что уже для $k = 3$ имеет место совпадение результатов с точностью до трех десятичных знаков. Таким образом, здесь имеет смысл привести только первые два корня [2, 3]: $\lambda_1 = 1.875/l$; $\lambda_2 = 4.694/l$.

В силу первого из условий (3), для определения c_k получаем равенство

$$\varphi\,(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k v_k(x).$$

Отсюда следует, что

$$c_k = \frac{\langle \varphi, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle}, \qquad \langle a, b \rangle = \int_0^l a\,(x)\, b\,(x)\, dx.$$

В нашем случае, в качестве начального смещения $\varphi(x)$ может быть взята функция

$$\varphi(x) = \frac{z\ x^2}{3l^4}\left(x^2 - 4lx + 6\ l^2\right), \tag{8}$$

которая задает профиль изогнутой балки. В (8) z это максимальная деформация свободного конца балки. Таким образом, получаем решение задачи (1) – (3) в следующем виде

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle \varphi, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k^4\ t^\alpha\right)\ v_k(x), \tag{9}$$

где

$$v_k(x) = \frac{1}{4}\left[(\mathrm{ch}\lambda_k l + \cos\lambda_k l\ )(\mathrm{sh}\lambda_k x\ - \sin\lambda_k x\ ) - (\mathrm{sh}\lambda_k l\ + \sin\lambda_k l\ )(\mathrm{ch}\lambda_k x\ - \cos\lambda_k x\ )\right].$$

Собственные частоты балки находятся из решения (2) при $\alpha = 2$: $\nu_k = \lambda_k^2/(2\pi)$. Если перейти к размерным величинам, то для рассматриваемой балки получится следующая формула для собственных частот

$$\nu_k = \frac{\lambda_k^2}{2\pi}\sqrt{\frac{EJ}{\rho S}}. \tag{10}$$

Здесь момент инерции поперечного сечения J должен вычисляться относительно оси, перпендикулярной плоскости изгиба балки. Для этого случая имеем (более подробно см. [13, с. 143-147]):

$$J = \frac{bh^3}{12}, \qquad S = bh, \tag{11}$$

где b и h — ширина и высота сечения балки. Из (10) и (11) находится практически важная формула для частоты основного тона колебаний:

$$\nu_1 \approx 0.162\frac{h}{l^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{12}$$

Циклическая частота колебаний равна

$$\omega_1 = 2\pi\nu_1 \approx 1.015\frac{h}{l^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{13}$$

Таким образом, для однородной балки прямоугольного сечения собственные частоты колебаний не зависят от ее ширины. По сравнению с балкой, у которой оба конца заделаны [4], частота основного тона колебаний уменьшается приблизительно в шесть раз.

Проведем теперь расчет пружинной жесткости балки $k_\perp$, которая соответствует вертикальному направлению. Потенциальная энергия изогнутой балки, выраженная через момент сил $M(x)$, равна

$$V = \frac{1}{2E}\int_0^l \frac{M^2(x)}{J(x)}dx = \frac{k_\perp^2 z^2}{2EJ}\int_0^l x^2 dx = \frac{k_\perp^2 z^2 l^3}{6EJ}. \tag{14}$$

Приравнивая выражение (14) к потенциальной энергии пружины $k_\perp z^2/2$, получим

$$k_\perp = \frac{3EJ}{l^3} = \frac{bE}{4}\left(\frac{h}{l}\right)^3. \tag{15}$$

Эффективная масса осциллятора равна

$$m = \frac{k_\perp}{\omega_1^2} \approx 0.243 m_0, \tag{16}$$

где m_0 – масса балки. Таким образом, задача может быть заметно упрощена [10]: вместо колебаний балки можно приближенно рассматривать колебания пружинного маятника с параметрами, определяемыми формулами (15) и (16).

В качестве резюме отметим следующее. При записи (1) для учета диссипации энергии колебаний не требуется вводить дополнительное слагаемое в виде динамической силы трения. Основное предположение заключается в использовании в (1) интегро-дифференциального оператора со степенной функцией памяти. В отличие от классического экспоненциального затухания колебаний, в нашем случае получается затухание, которое определяется конечным числом нулей функции Миттаг-Леффлера при $1 < \alpha < 2$ (см. [14]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киселев В.А.* Строительная механика. М.: Стройиздат, 1976. 511 с.
2. *Работнов Ю.Н.* Сопротивление материалов. М.: Физматгиз, 1962. 456 с.
3. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
4. *Рехвиашвили С.Ш., Псху А.В., Кидакоев А.М.* Моделирование колебаний балки с заделанными концами с применением дробного интегро-дифференцирования // Прикладная физика и математика. 2017. № 4. С. 51–55.
5. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
6. *Олемской А.И., Флат А.Я.* Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды // УФН. 1993. Т. 163, № 12. С. 1–50.
7. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. Ульяновск: Изд-во “Артишок”, 2008. 512 с.
8. *Agrawal O.P.* A general solution for the fourth-order fractional diffusion-wave equation // Fractional Calculation and Applied Analysis, 2000, vol. 3, pp. 1–12.
9. *Agrawal O.P.* A general solution for a fourth-order fractional diffusion–wave equation defined in a bounded domain // Computers and Structures, 2001, vol. 79, pp. 1497–1501.
10. *Рехвиашвили С.Ш., Псху А.В.* Новый метод описания затухающих колебаний балки с одним заделанным концом // Журнал технической физики. 2019. Т. 89, № 9. С. 1314–1318.
11. *Псху А.В., Рехвиашвили С.Ш.* Анализ вынужденных колебаний дробного осциллятора // Письма в Журнал технической физики. 2019. Т. 45, № 1. С. 34–37.

12. *Parovik R.* Mathematical Modeling of Linear Fractional Oscillators // Mathematics, 2020, vol. 8, № 11, pp. 1879.
13. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
14. *Попов А.Ю., Седлецкий А.М.* Распределение корней функций Миттаг-Леффлера // РУДН, СМФН. 2011. Т. 40. С. 3–171.

ABSTRACT

A mathematical model of vibrations of a beam with one fixed and another free end has been developed, taking into account the effect of dynamic hysteresis, which is described using fractional integro-differentiation. The solution of the model equation is found in analytical form. The use of the fractional integro-differentiation makes it possible to correctly describe the dissipative nature of the beam vibrations.

Keywords: mathematical modeling, fractional integro-differentiation, initial boundary value problem, elastic beam.

[1]*Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik; rsergo@mail.ru, pskhu@list.ru*
[2]*Federal State Budget Educational Institution of Higher Education North Caucasian State Academy, Cherkessk; institut.sie@mail.ru*

АННОТАЦИЯ

Разработана математическая модель колебаний балки с одним заделанным и другим свободным концом с учетом эффекта динамического гистерезиса, который описывается с помощью дробного интегро-дифференцирования. В аналитическом виде найдено решение уравнения модели. Применение аппарата дробного интегро-дифферецирования позволяет корректно описывать диссипативный характер колебаний балки.

Ключевые слова: математическое моделирование, дробное интегро-дифференцирование, начально-краевая задача, упругая балка.

[1]*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик; rsergo@mail.ru, pskhu@list.ru*
[2]*Северо-Кавказская государственная академия, Черкесск; institut.sie@mail.ru*