УДК 517.925.4
DOI: 10.47928/1726-9946-2020-20-4-19-24

Аналог неравенства Ляпунова для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с оператором распределенного дифференцирования

Эфендиев Б.И.

Представлено академиком АМАН Псху А.В.

1. Введение. В интервале $0 < x < l$ рассмотрим уравнение

$$u''(x) - \int\limits_0^1 \mu(\alpha) D_{0x}^{\alpha} u(x) d\alpha = 0, \tag{1}$$

где

$$D_{0x}^{\alpha} u(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^{\alpha+1}}, \qquad \alpha < 0,$$

$$D_{0x}^{\alpha} u(x) = u(x), \qquad \alpha = 0,$$

$$D_{0x}^{\alpha} u(x) = \frac{d^n}{dx^n} D_{0x}^{\alpha-n} u(x), \qquad n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N}$$

– оператор дробного интегродифференцирования (в смысле Римана – Лиувилля) порядка α [1], [2], $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, $\mu(\alpha)$ – заданная функция.

В последнее время интегральный оператор в уравнении (1), который был введен в работе [1], называют оператором непрерывно распределенного дифференцирования. В работах [2] и [3] были изучены свойства операторов непрерывно распределенного дифференцирования и интегрирования.

Для уравнения (1) построено фундаментальное решение и найдено в явном виде решение начальной задачи в работе [4], а в [5] методом функции Грина решена задача Дирихле для уравнения (1).

Неравенство Ляпунова играет важную роль при изучении спектральных свойств обыкновенных дифференциальных уравнений. Подобные приложения включают в себя оценки собственных значений, критерии устойчивости для периодических дифференциальных уравнений и оценки для интервалов несоответствия [6], [7].

В работе [8] для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка, содержащего композицию дробных производных с различными началами, найдено необходимое условие существования нетривиального решения однородной задачи Дирихле. Условие имеет форму интегральной оценки для потенциала и является аналогом неравенства Ляпунова.

В данной работе получен аналог неравенства Ляпунова задачи Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с оператором непрерывно распределенного дифференцирования, используя результаты работы [5].

2. Обозначения. Пусть $\mu(\alpha) \in L[0,1]$. Далее будем обозначать через

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x), \quad w_0(x) = x, \quad w_n(x) = \int\limits_0^x w_{n-1}(x-t)k(t)dt, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

$$k(x) = \int\limits_0^1 \mu(\alpha) \frac{x^{1-\alpha} d\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}, \quad x \in [0,l], \tag{3}$$

$$F(t,\alpha) = l(x-t)^{1-\alpha} - x(l-t)^{1-\alpha}, \quad t \in [0,x], \quad \alpha \in [0,1], \tag{4}$$

$$K(x,t) = H(x-t)k(x-t) - \frac{x}{l}k(l-t), \quad x \in [0,l], \quad t \in [0,x], \tag{5}$$

$\overline{u}$ – наибольшее значение функции $|u(x)|$ на отрезке $[0,l]$, $H(x)$ – функция Хевисайда.

В силу равенства (3) функцию $K(x,t)$ запишем в виде

$$K(x,t) = H(x-t)\int\limits_0^1 \mu(\alpha)\frac{(x-t)^{1-\alpha}d\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} - \frac{x}{l}\int\limits_0^1 \mu(\alpha)\frac{(l-t)^{1-\alpha}d\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{\mu(\alpha)}{l\Gamma(2-\alpha)}\Big[H(x-t)l(x-t)^{1-\alpha} - x(l-t)^{1-\alpha}\Big]d\alpha. \tag{6}$$

Лемма 1. *$F(t,\alpha)$ как функция переменной t монотонно убывает на отрезке $[0,x]$ для любого фиксированного $x \in [0,l]$, причем наибольшее значение функции по абсолютной величине равно*

$$F_{max} = \sup_{t\in[0,x]} |F(t,\alpha)| = \max\Big\{lx^{1-\alpha} - xl^{1-\alpha}; x(l-x)^{1-\alpha}\Big\}. \tag{7}$$

Доказательство. Найдем производную по переменной t от функции $F(t,\alpha)$ и определим ее знак на отрезке $[0,x]$

$$F_t(t,\alpha) = -(1-\alpha)l(x-t)^{-\alpha} + (1-\alpha)x(l-t)^{-\alpha}.$$

Домножим обе части последнего равенства на положительную функцию $(x-t)^\alpha/x$. Тогда получим

$$\frac{(x-t)^\alpha}{x}F_t(t,\alpha) = -(1-\alpha)\left[\frac{l}{x} - \Big(\frac{x-t}{l-t}\Big)^\alpha\right] \le 0, \tag{8}$$

так как выражение в квадратных скобках положительно для любого $t \in [0,x]$.

Из неравенства (8) следует, что производная $F_t(t,\alpha) \le 0$, причем $F_t(t,\alpha) = 0$, когда $\alpha = 1$. Следовательно, функция $F(t,\alpha)$ монотонно убывает на отрезке $[0,x]$ и принимает наибольшее значение в точке $t = 0$ и наименьшее значение в точке $t = x$, то есть

$$F(0,\alpha) = lx^{1-\alpha} - xl^{1-\alpha} > 0, \qquad F(x,\alpha) = -x(l-x)^{1-\alpha} < 0, \quad \forall x \in [0,l],$$

из которых получаем соотношение (7). Лемма 1 доказана.

3. Редукция к интегральному уравнению. *Регулярным решением* уравнения (1) в интервале $]0,l[$ назовем функцию $u(x)$, принадлежащую классу $C[0,l]\cap C^2]0,l[$ и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $x\in]0,l[$.

Лемма 2. *Пусть $u(x)$ – регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям $u(0)=0$, $u(l)=0$. Тогда функция $u(x)$ является решением интегрального уравнения*

$$u(x)=\int\limits_0^l K(x,t)u(t)dt. \tag{9}$$

Доказательство. Учитывая определение оператора дробного интегродифференцирования и формулу перестановки Дирихле, интегральный оператор в уравнении (1) запишем в виде

$$\int\limits_0^1 \mu(\alpha)D_{0x}^{\alpha}u(x)d\alpha=\frac{d^2}{dx^2}\int\limits_0^1\mu(\alpha)D_{0x}^{\alpha-2}u(x)d\alpha=\frac{d^2}{dx^2}\int\limits_0^1\frac{\mu(\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}\int\limits_0^x\frac{u(t)dt}{(x-t)^{\alpha-1}}d\alpha=$$

$$=\frac{d^2}{dx^2}\int\limits_0^x u(t)\int\limits_0^1\mu(\alpha)\frac{(x-t)^{1-\alpha}d\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}dt=\frac{d^2}{dx^2}\int\limits_0^x u(t)k(x-t)dt. \tag{10}$$

С учетом соотношения (10) перепишем уравнение (1) в виде равенства

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[u(x)-\int\limits_0^x u(t)k(x-t)dt\right]=0,$$

которое эквивалентно следующему уравнению

$$u(x)-\int\limits_0^x u(t)k(x-t)dt=C_1x+C_2, \tag{11}$$

где C_1 и C_2 – некоторые постоянные, требующие определения.

Из определения регулярного решения и формулы (3) следует, что

$$\lim_{x\to 0}\int\limits_0^x u(t)k(x-t)dt=0.$$

Учитывая последнее равенство и краевые условия $u(0)=0$, $u(l)=0$, из уравнения (11) находим постоянные C_1 и C_2

$$C_2=0,\quad C_1=-\frac{1}{l}\int\limits_0^l u(t)k(l-t)dt. \tag{12}$$

Подставляя равенства (12) в формулу (11), с учетом соотношения (5) получим интегральное уравнение (9).

4. Аналог неравенства Ляпунова. Из замечания работы [5] следует, что если $W(l)=0$, то однородная задача

$$u''(x)-\int\limits_0^1 \mu(\alpha)D_{0x}^{\alpha}u(x)d\alpha=0, \quad u(0)=0, \quad u(l)=0 \tag{13}$$

имеет ненулевое решение. В частности, любая функция $u(x)=cW(x)$, c – const, является решением задачи (13).

Теорема. *Пусть уравнение (1) имеет нетривиальное решение $u(x)$, удовлетворяющее условиям $u(0)=u(l)=0$. Тогда справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^1 \frac{|\mu(\alpha)|h(\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}d\alpha>l, \tag{14}$$

где

$$h(\alpha)=\sup_{x\in[0,l]}\Big[\frac{x(l-x)^{2-\alpha}}{2-\alpha}+\max\big\{lx^{2-\alpha}-x^2l^{1-\alpha};x^2(l-x)^{1-\alpha}\big\}\Big].$$

Доказательство. В силу уравнения (9) имеет место неравенство

$$|u(x)|\le\int\limits_0^l |K(x,t)|\,|u(t)|dt,$$

из которого, учитывая что $\overline{u}=\sup|u(x)|>0$ для любого $x\in[0,l]$, получим

$$\overline{u}<\overline{u}\sup_{x\in[0,l]}\int\limits_0^l |K(x,t)|dt. \tag{15}$$

Так как $\overline{u}\ne0$, то неравенство (15) эквивалентно соотношению

$$\sup_{x\in[0,l]}\int\limits_0^l |K(x,t)|dt>1. \tag{16}$$

В силу формулы (6) интеграл в неравенстве (16) запишем в виде

$$\int\limits_0^l |K(x,t)|dt=\left(\int\limits_0^x+\int\limits_x^l\right)|K(x,t)|dt=$$

$$= \int\limits_0^x \int\limits_0^1 \frac{|\mu(\alpha)|}{l\Gamma(2-\alpha)} \left| l(x-t)^{1-\alpha} - x(l-t)^{1-\alpha} \right| d\alpha dt + \int\limits_x^l \int\limits_0^1 \frac{|\mu(\alpha)|}{l\Gamma(2-\alpha)} x(l-t)^{1-\alpha} d\alpha dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{|\mu(\alpha)|}{l\Gamma(2-\alpha)} \int\limits_0^x |F(t,\alpha)| dt d\alpha + \int\limits_0^1 \frac{|\mu(\alpha)|}{l\Gamma(2-\alpha)} \frac{x(l-x)^{2-\alpha}}{2-\alpha} d\alpha \leq$$

$$\leq \int\limits_0^1 \frac{|\mu(\alpha)|}{l\Gamma(2-\alpha)} \left[xF_{max} + \frac{x(l-x)^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right] d\alpha. \tag{17}$$

Подставляя соотношение (17) в неравенство (16) получим формулу (14). Соотношение (14) назовем аналогом неравенства Ляпунова.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А.М.* О непрерывных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 4. С. 796-799.
2. *Нахушев А.М.* О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 101-109.
3. *Псху А.В.* К теории оператора интегро-дифференцирования континуального порядка // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 1. С. 120-127.
4. *Эфендиев Б.И.* Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с оператором непрерывно распределенного дифференцирования // Доклады АМАН. 2020. Т. 22, № 1. С. 64-68.
5. *Эфендиев Б.И.* Задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с оператором распределенного дифференцирования // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 29, № 4. С. 49-58.
6. *Ляпуновъ А.М.* Объ одномъ вопросе, касающемся линейныхъ дифференціальныхъ уравненій второго порядка с періодическими коэффиціентами // Сообщения Харкiвского математического общества. Вторая серия. 1987. Т. 5, № 4. С. 190-254.
7. *Brown R.C., Hinton D.B.* Lyapunov Inequalities and their Applications // Survey on Classical Inequalities. Mathematics and Its Applications. Dordrecht: Springer, 2000, vol. 517, pp. 1-25.
8. *Энеева Л.М.* Неравенство Ляпунова для уравнения с производными дробного порядка с различными началами // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 28, № 3. С. 32-39.

ABSTRACT

For an ordinary second-order differential equation with an operator of continuously distributed differentiation, an analogue of the Lyapunov inequality of the Dirichlet problem is proved.

Keywords: fractional Riemann-Liouville integral, fractional Riemann-Liouville derivative, fractional Gerasimov-Caputo derivative, operator of continuously distributed differentiation, Dirichlet problem, Lyapunov inequality.

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik

E-mail: beslan_efendiev@mail.ru

АННОТАЦИЯ

Для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с оператором непрерывно распределенного дифференцирования доказывается аналог неравенства Ляпунова задачи Дирихле.

Ключевые слова: дробный интеграл Римана – Лиувилля, дробная производная Римана – Лиувилля, дробная производная Герасимова – Капуто, оператор непрерывно распределенного дифференцирования, задача Дирихле, неравенство Ляпунова.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик
E-mail: beslan_efendiev@mail.ru