УДК 517.95
DOI: 10.47928/1726-9946-2020-20-4-9-14

Задача Коши для одного нагруженного волнового уравнения

Хубиев К.У.

Представлено академиком АМАН Псху А.В.

1. Введение. Рассмотрим нагруженное [1] волновое уравнение

$$u_{xx} - u_{yy} + \lambda u[\theta_0(x-y)] = f(x,y), \tag{1}$$

в области Ω, ограниченной отрезками прямых характеристиками $x + y = 0$, $x - y = r$ уравнения (1) при $y < 0$ и отрезком прямой $y = 0$; $u = u(x,y)$, $\lambda = const$, $g(x,y)$ – заданная функция, $\theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right)$ – аффикс точки пересечения характеристики, исходящей из точки (x,y), с характеристикой $x + y = 0$ ([2,3]).

Краевые задачи для нагруженных уравнений с частными производными исследовались в работах многих авторов (см. например, [1,4] и библиографию там же). В настоящее время теория краевых задач для нагруженных уравнений смешанного типа продолжает интенсивно развиваться. Интерес к краевым задачам для нагруженных дифференциальных уравнений вызван не только теоретическими аспектами, но и многочисленными приложениями их в математическом моделировании физико-биологических процессов. Кроме того, в некоторых случаях для исследования разрешимости нелокальных краевых задач весьма эффективен метод, основанный на сведении их к локальным задачам для нагруженного уравнения [2], [5–9]. В работе [10] был предложен приближенно-аналитический метод решения смешанной задачи с однородными начальными условиями для нагруженного гиперболического уравнения, аппроксимирующего дифференциальное уравнение в частных производных с натуральной степенной нелинейностью. В [11] исследуются вопросы существования и единственности слабого решения смешанной задачи для нагруженного волнового уравнения, с помощью которого можно аппроксимировать нелинейное уравнение, возникающее в релятивистской квантовой механике или при моделировании колебательных процессов.

Среди работ, посвященных нагруженным уравнениям гиперболического типа, отметим следующие. В работе [12] исследована смешанная краевая задача для уравнения плоской волны в прямоугольной области. В работах [13], [14] доказан принцип максимума для нагруженных уравнений гиперболического типа с переменными коэффициентами. В работе [15] рассмотрены задачи Коши, Гурса и Дарбу для нагруженного уравнения колебания струны $u_{xx} - u_{yy} = \lambda u(x_0, 0)$, $\lambda, x_0 = const$. Построено явное представление решения задачи Коши, которое при $\lambda = 0$ совпадает с известным представлением решения задачи Коши для уравнения колебания струны. Описаны области зависимости, влияния и определения данных Коши. Показано их существенное отличие от аналогичных областей в случае задачи Коши для уравнения колебания струны. Сформулированы задачи Дарбу и Гурса в нелокальной постановке и предложен алгоритм построения их решений. В работе [16] объектом исследования является одномерное нагруженное волновое уравнение с нагрузкой, распространяющейся вдоль одной из своих характеристик $u_{xx} - u_{yy} = \lambda u(x+y,0)$, $\lambda = const$. Для него ставится задача Коши с данными на одной из характеристик и доказывается ее однозначная разрешимость. Показано, что характеристики данного уравнения как носители данных Коши являются неравноправными. Описаны области зависимости, влияния и определения начальных данных, которые задаются на характеристике $y = x$. В [17] для уравнения с нагрузкой на характеристике $u_{xx} - u_{yy} = \lambda u\Big(\frac{x+y+x_0}{2}, \frac{x+y-x_0}{2}\Big)$, где λ, x_0 – заданные действительные числа, рассматривается задача Гурса. Решение искомой задачи выписано в явном аналитическом виде. В работе [18] для модельного существенно нагруженного уравнения гиперболического типа $u_{xx} - u_{tt} = \lambda u_{tt}(x_0,t)$, $\lambda, x_0 = const$ в прямоугольной области исследована задача граничного управления. Установлены необходимые и достаточные условия на начальные и финальные функции, обеспечивающие существование граничных управлений. При выполнении этих условий найден явный аналитический вид искомых управлений.

2. Основной результат. Уравнение (1) отличается от большинства исследованных уравнений тем, что нагруженное слагаемое попадает на характеристику (как и в [17]). Здесь для уравнения (1) будем рассматривать классическую задачу Коши.

Задача 1. *Найти в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения (1) из класса $C\big(\bar{\Omega}\big) \cap C^2\big(\Omega\big)$, удовлетворяющее условиям:*

$$u(x,0) = \tau(x), \quad 0 \le x \le r, \tag{2}$$

$$u_y(x,0) = \nu(x), \quad 0 < x < r, \tag{3}$$

где $\tau(x), \nu(x)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Пусть существует решение $u(x,y)$ задачи (1)-(3). Тогда, считая нагруженное слагаемое известным, его можно представить в виде:

$$u(x,y) = \frac{\tau(x+y) + \tau(x-y)}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y} \nu(\xi)\, d\xi +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\int\limits_{y}^{0}\int\limits_{x+y-\eta}^{x-y+\eta} u[\theta_0(\xi-\eta)] d\xi d\eta - \frac{1}{2}\int\limits_{y}^{0}\int\limits_{x+y-\eta}^{x-y+\eta} f(\xi,\eta) d\xi d\eta. \tag{4}$$

Обозначим через

$$p(x,y) = \frac{\tau(x+y) + \tau(x-y)}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y} \nu(\xi)\, d\xi, \quad q(x,y) = -\frac{1}{2}\int\limits_{y}^{0}\int\limits_{x+y-\eta}^{x-y+\eta} f(\xi,\eta) d\xi d\eta,$$

$$g(x,y) = p(x,y) + q(x,y).$$

Тогда (4) примет вид

$$u(x,y)-\frac{\lambda}{2}\int\limits_{y}^{0}\int\limits_{x+y-\eta}^{x-y+\eta}u[\theta_0(\xi-\eta)]d\xi d\eta=g(x,y).$$

Совершив в двойном интеграле замену переменной по формуле $\xi-\eta=s$, получим

$$\frac{\lambda}{2}\int\limits_{y}^{0}\int\limits_{x+y-\eta}^{x-y+\eta}u[\theta_0(\xi-\eta)]d\xi d\eta=\frac{\lambda}{2}\int\limits_{y}^{0}\int\limits_{x+y-2\eta}^{x-y}u[\theta_0(s)]dsd\eta.$$

Далее, изменив порядок интегрирования, после несложных вычислений получим

$$u(x,y)-\frac{\lambda}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}\frac{s-(x+y)}{2}u[\theta_0(s)]ds=g(x,y). \tag{5}$$

Из (5), устремляя $(x,y)\to(x/2,-x/2)=\theta_0(x)$ и заменив переменную интегрирования s на ξ, на характеристике $x+y=0$ получим

$$u[\theta_0(x)]-\frac{\lambda}{4}\int\limits_{0}^{x}\xi u[\theta_0(\xi)]d\xi=g[\theta_0(x)],$$

или же, введя обозначения $z(x)=u[\theta_0(x)]$, $\rho(x)=g[\theta_0(x)]$,

$$z(x)-\frac{\lambda}{4}\int\limits_{0}^{x}\xi z(\xi)d\xi=\rho(x). \tag{6}$$

Уравнение (6) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода. Дифференцируя (6), получаем

$$z'(x)-\frac{\lambda x}{4}z(x)=\rho'(x),$$

причем $z(0)=\rho(0)=g(0,0)=p(0,0)=\tau(0)$. Далее

$$\left[z(x)e^{-\lambda x^2/8}\right]'=e^{-\lambda x^2/8}\rho'(x),$$

откуда, интегрируя от 0 до x, получим

$$z(x)=z(0)e^{\lambda x^2/8}+\int\limits_{0}^{x}\rho'(\xi)e^{\lambda(x^2-\xi^2)/8}d\xi.$$

Интегрируя по частям, имеем:

$$z(x)=\rho(x)-\rho(0)e^{\lambda x^2/8}+z(0)e^{\lambda x^2/8}+\frac{\lambda}{4}\int\limits_0^x \xi\rho(\xi)e^{\lambda(x^2-\xi^2)/8}d\xi,$$

и учитывая, что $\rho(0)=z(0)$, окончательно получаем, что решение уравнения (6) задается формулой

$$z(x)=\rho(x)+\frac{\lambda}{4}\int\limits_0^x \xi\rho(\xi)e^{\lambda(x^2-\xi^2)/8}d\xi. \tag{7}$$

Далее, из (7) получаем:

$$u[\theta_0(x)]=z(x)=g[\theta_0(x)]+\frac{\lambda}{4}\int\limits_0^x \xi g[\theta_0(\xi)]e^{\lambda(x^2-\xi^2)/8}d\xi=$$

$$=p[\theta_0(x)]+q[\theta_0(x)]+\frac{\lambda}{4}\int\limits_0^x \xi\big(p[\theta_0(\xi)]+q[\theta_0(\xi)]\big)e^{\lambda(x^2-\xi^2)/8}d\xi=$$

$$=\frac{\tau(0)+\tau(x)}{2}-\frac{1}{2}\int\limits_0^x \nu(\xi)d\xi-\frac{1}{2}\int\limits_{-x/2}^0\int\limits_{-\eta}^{x+\eta} f(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$

$$+\frac{\lambda}{8}\int\limits_0^x\left[\xi\Big(\tau(0)+\tau(\xi)-\int\limits_0^\xi \nu(s)ds-\int\limits_{-\xi/2}^0\int\limits_{-t}^{\xi+t} f(s,t)dsdt\Big)e^{\lambda(x^2-\xi^2)/8}\right]d\xi. \tag{8}$$

Подставляя $u[\theta_0(x-y)]$ из (8) в (4), получим

$$u(x,y)=\frac{\tau(x+y)+\tau(x-y)}{2}-\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}\nu(\xi)\,d\xi-\frac{1}{2}\int\limits_y^0\int\limits_{x+y-\eta}^{x-y+\eta} f(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$

$$+\frac{\lambda}{2}\int\limits_y^0\int\limits_{x+y-\eta}^{x-y+\eta}\left\{\frac{\tau(0)+\tau(\xi-\eta)}{2}-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\xi-\eta}\nu(s)ds-\frac{1}{2}\int\limits_{-(\xi-\eta)/2}^0\int\limits_{-t}^{\xi-\eta+t} f(s,t)dsdt+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda}{8}\int\limits_0^{\xi-\eta}\left[s\Big(\tau(0)+\tau(s)-\int\limits_0^s \nu(w)dw-\int\limits_{-s/2}^0\int\limits_{-t}^{s+t} f(w,t)dwdt\Big)e^{\lambda((\xi-\eta)^2-s^2)/8}\right]ds\right\}d\xi d\eta. \tag{9}$$

3. Заключение. Таким образом, мы показали, что регулярное решение уравнения задачи 1 задается формулой (9). Непосредственной подстановкой легко убедиться, что формула (9) удовлетворяет как уравнению (1), так и условиям Коши (2), (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применения. М.: Наука, 2012. 232 с.
2. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.
3. *Нахушев А.М.* О некоторых новых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 1. С. 44-59.
4. *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. Алматы: FЫЛЫМ, 2010. 334 с.
5. *Нахушев А.М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения, 1982. Т. 18, № 1. С. 72-81.
6. *Нахушев А.М.* О нелокальных задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 1. С. 92-101.
7. *Огородников Е.Н.* Корректность задачи Коши-Гурса для системы вырождающихся нагруженных гиперболических уравнений в некоторых специальных случаях и ее равносильность задачам с нелокальными краевыми условиями // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2004. № 26. С. 26-38.
8. *Кожанов А.И.* О разрешимости пространственно нелокальных краевых задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка // Доклады Академии наук. 2009. № 6. С. 747-749.
9. *Пулькина Л.С.* Нелокальная задача с интегральными условиями для одномерного гиперболического уравнения и ее связь с нагруженным дифференциальным уравнением // Доклады АМАН. 2013. Т. 15, № 2. С. 68-72.
10. *Бозиев О.Л.* Решение нелинейного гиперболического уравнения приближенно-аналитическим методом // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 51. С. 5-14.
11. *Бозиев О.Л.* О слабых решениях нагруженного гиперболического уравнения с однородными начальными условиями // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 63. С. 5-14.
12. *Хубиев К.У.* О модели нагруженного гиперболо-параболического уравнения в частных производных второго порядка // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2015. № 2(11). С. 27-38.
13. *Хубиев К.У.* Принцип максимума для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа // Владикавказский математический журнал. 2016. Т. 18, № 4. С. 80-85.
14. *Хубиев К.У.* Аналог задачи Трикоми для характеристически нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с переменными коэффициентами // Уфимск. матем. журн. 2017. Т. 9, № 2. С. 94-103.
15. *Аттаев А.Х.* Краевые задачи для нагруженного волнового уравнения // Вестник Карагандинского университета. Серия: Математика. 2017. № 2(86). С. 8-13.
16. *Аттаев А.Х.* К вопросу разрешимости задачи Коши для одного нагруженного гиперболического уравнения второго порядка // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2018. № 6(86). С. 5-9.

17. *Attaev A.Kh.* The characteristic problem for the second-order hyperbolic equation loaded along one of its characteristics // Vestnik KRAUNC. Fiziko-matematiceskie nauki, 2018, № 3(23), pp. 14-18.

18. *Аттаев А.Х.* Задача граничного управления для нагруженного уравнения колебания струны // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 5. С. 646-651.

ABSTRACT

In this paper we consider the Cauchy problem for the loaded wave equation. Under this investigation the loaded term falls on the characteristic of the equation which differs from other studied equations. The solution of the Cauchy problem is written out explicitly.

Keywords: Cauchy problem, loaded equation, wave equation.

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik
E-mail: khubiev_math@mail.ru

АННОТАЦИЯ

В работе рассматривается задача Коши для нагруженного волнового уравнения. Исследуемое уравнение отличается от большинства исследованных уравнений тем, что нагруженное слагаемое попадает на характеристику уравнения. Решение задачи Коши выписано в явном виде.

Ключевые слова: задача Коши, нагруженное уравнение, волновое уравнение.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик
E-mail: khubiev_math@mail.ru