УДК 517.53
DOI: 10.47928/1726-9946-2020-20-4-15-18

Формулы дифференцирования и формула автотрансформации для одного частного случая функции Фокса

Хуштова Ф.Г.

Представлено академиком АМАН Псху А.В.

1. Вспомогательные сведения. Далее в работе

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt, \quad \operatorname{Re}z>0, \tag{1}$$

– *гамма-функция Эйлера* [1, с. 5], [2, с. 15]. Имеют место формулы [1, с. 10], [2, с. 17]

$$\Gamma(s+n)=(s)_n\Gamma(s), \tag{2}$$

$$\Gamma(s+1-n)=\frac{(-1)^n\Gamma(s+1)}{(-s)_n}, \tag{3}$$

где $n=0,1,2,...$, $(s)_n$ – *символ Похгаммера*, определяемый равенствами

$$(s)_n=s(s+1)(s+2)...(s+n-1), \quad (s)_0=1. \tag{4}$$

Пусть $0<\rho\leqslant 2$, μ, σ и $r\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\sigma+r)/2\notin\mathbb{Z}$. Обозначим

$$\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(z)=H_{2,3}^{2,1}\left[\frac{z^2}{4}\,\middle|\,\begin{matrix}(1-\sigma/2,1),\,(\mu-\rho\,\sigma/2,\rho)\\(r/2,1),\,(1-\sigma/2,1),\,(-r/2,1)\end{matrix}\right], \tag{5}$$

где $H_{2,3}^{2,1}[...]$ – *H-функция Фокса* [3–5].

В терминах функции (5) выписаны решения краевых задач для дифференциального уравнения с оператором Бесселя и частной производной дробного порядка [6], [7].

Из интегрального представления функции Фокса [3, с. 528], [4, с. 1], [5, с. 2] следует интегральное представление

$$\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{i\infty}}\Theta(s)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s}ds, \quad z\in\mathbb{C}, \tag{6}$$

где $L_{i\infty}=(\omega-i\infty,\omega+i\infty)$, $\quad \omega_1<\omega<\omega_2$,

$$\omega_1=-\min\{\operatorname{Re}r/2,1-\operatorname{Re}\sigma/2\}, \quad \omega_2=\operatorname{Re}\sigma/2, \tag{7}$$

$$\Theta(s)=\frac{\Gamma(r/2+s)\,\Gamma(1-\sigma/2+s)\,\Gamma(\sigma/2-s)}{\Gamma(\mu-\rho\,\sigma/2+\rho\,s)\,\Gamma(1+r/2-s)}. \tag{8}$$

Интеграл (6) абсолютно сходится, если:

$$\rho < 2,\ 0 \leqslant |\arg z| < \pi\left(1-\rho/2\right)/2,\ z \neq 0,$$

$$\rho = 2,\ \arg z = 0,\ \mathrm{Re}\left(\mu-\sigma\right) > 1/2,\ z \neq 0,$$

$$\rho < 2,\ 0 \leqslant |\arg z| = \pi\left(1-\rho/2\right)/2,\ \mathrm{Re}\,\mu - \rho\,\mathrm{Re}\,\sigma/2 > (2-\rho)\,\omega + 1/2,\ z \neq 0.$$

2. Основные результаты. Докажем два свойства функции (5).

Свойство 1. *Справедливы следующие формулы дифференцирования:*

$$\frac{d^n}{(z\,dz)^n}\left[\frac{\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(z)}{z^r}\right] = (-1)^n \frac{\mathcal{J}_{r+n}^{\rho,\mu,\sigma+n}(z)}{z^{r+n}}, \tag{9}$$

$$\frac{d^n}{(z\,dz)^n}\left[z^r \mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(z)\right] = z^{r-n}\mathcal{J}_{r-n}^{\rho,\mu,\sigma+n}(z), \tag{10}$$

$n = 0, 1, 2, ...$

Доказательство. Действительно, положив $z^2 = t$, продифференцируем n раз по t равенство

$$t^{-r/2}\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(\sqrt{t}\,) = \frac{t^{-r/2}}{2\pi i}\int\limits_{L_{i\infty}} \Theta(s)\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)^{-2s} ds.$$

В результате получим

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{-r/2}\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(\sqrt{t}\,)\right] = \frac{(-1)^n t^{-r/2-n}}{2\pi i}\int\limits_{L_{i\infty}} \Theta(s)\big(r/2+s\big)_n\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)^{-2s} ds,$$

где $(s)_n$ определяется из (4). Воспользовавшись далее формулой (2) и учитывая представление (8), получаем

$$\frac{d^n}{d\,(z^2)^n}\left[\frac{\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(z)}{z^r}\right] = \frac{(-1)^n}{2^n}\frac{\mathcal{J}_{r+n}^{\rho,\mu,\sigma+n}(z)}{z^{r+n}},$$

откуда и следует (9).

Продифференцировав теперь n раз по t равенство

$$t^{r/2}\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(\sqrt{t}\,) = \frac{t^{r/2}}{2\pi i}\int\limits_{L_{i\infty}} \Theta(s)\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)^{-2s} ds,$$

получим

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{r/2}\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(\sqrt{t}\,)\right] = \frac{(-1)^n t^{r/2-n}}{2\pi i}\int\limits_{L_{i\infty}} \Theta(s)\,(-r/2+s)_n\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)^{-2s} ds.$$

Тогда из формулы (3), учитывая обозначение (8), будем иметь

$$\frac{d^n}{d\,(z^2)^n}\left[z^r\mathcal{J}_r^{\rho,\,\mu,\,\sigma}(z)\right] = \frac{z^{r-n}}{2^n}\mathcal{J}_{r-n}^{\rho,\,\mu,\,\sigma+n}(z),$$

откуда следует (10).

Полагая в (9) и (10) $n=1$, в частности получим формулы

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{\mathcal{J}_r^{\rho,\,\mu,\,\sigma}(z)}{z^r}\right] = -\frac{\mathcal{J}_{r+1}^{\rho,\,\mu,\,\sigma+1}(z)}{z^r},$$

$$\frac{d}{dz}\left[z^r\mathcal{J}_r^{\rho,\,\mu,\,\sigma}(z)\right] = z^r\mathcal{J}_{r-1}^{\rho,\,\mu,\,\sigma+1}(z).$$

Свойство 2. *Имеет место формула автотрансформации*

$$\mathcal{J}_r^{\rho,\,\mu,\,\sigma+2n}(z) = (-1)^n\mathcal{J}_r^{\rho,\,\mu-n\rho,\,\sigma}(z), \quad n=0,1,2,... \tag{11}$$

Доказательство. Из интегрального представления (6) имеем

$$\mathcal{J}_r^{\rho,\,\mu,\,\sigma+2n}(z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{i\infty}} \frac{\Gamma\,(r/2+s)\,\Gamma\,(1-\sigma/2+s-n)\,\Gamma\,(\sigma/2-s+n)}{\Gamma\,(\mu-n\rho-\rho\,\sigma/2+\rho\,s)\,\Gamma\,(1+r/2-s)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s}ds.$$

Воспользовавшись здесь формулами (2) и (3), получим

$$\mathcal{J}_r^{\rho,\,\mu,\,\sigma+2n}(z) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2\pi i}\int\limits_{L_{i\infty}} \frac{\Gamma\,(r/2+s)\,\Gamma\,(1-\sigma/2+s)\,\Gamma\,(\sigma/2-s)}{\Gamma\,(\mu-n\rho-\rho\,\sigma/2+\rho\,s)\,\Gamma\,(1+r/2-s)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s}ds,$$

что и доказывает равенство (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кузнецов Д.С.* Специальные функции. М.: Высшая школа, 1962. 248 с.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. I. М.: Наука, 1965. 296 с.
3. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Т. 3. Дополнительные главы. М.: Физматлит, 2003. 688 с.
4. *Kilbas A.A., Saigo M.* H-Transform. Theory and Applications. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton-London-New York-Washington, D.C. 2004, 389 p.
5. *Mathai A.M., Saxena R.K., Haubold H.J.* The H-function. Theory and Applications. Springer, 2010, 270 p.
6. *Хуштова Ф.Г.* Первая краевая задача в полуполосе для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и производной Римана–Лиувилля // Математические заметки. 2016. Т. 99, вып. 6. С. 921-928.

7. *Хуштова Ф.Г.* Вторая краевая задача в полуполосе для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и частной производной Римана–Лиувилля // Математические заметки. 2018. Т. 103, вып. 3. С. 460-470.

ABSTRACT

Differentiation formulas of integer order and an autotransformation formula for one particular case of the Fox function are obtained.

Keywords: Fox function, differentiation formulas, autotransformation formula.

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik
E-mail: khushtova@ya.ru

АННОТАЦИЯ

Получены формулы дифференцирования целого порядка и формула автотрансформации для одного частного случая функции Фокса.

Ключевые слова: функция Фокса, формулы дифференцирования, формула автотрансформации.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик
E-mail: khushtova@ya.ru