УДК 517.512
DOI: 10.47928/1726-9946-2020-20-4-6-8

Об оценках нормы оператора перестановок системы Хаара

Маршан Р.Б.

Представлено академиком АМАН Псху А.В.

Введем обозначения:

$$\mathrm{A}_0=\left\{[0,1)\,,\left[0,\frac{1}{2}\right)\,,\left[\frac{1}{2},1\right)\,,\left[0,\frac{1}{4}\right)\,,\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\,,\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)\,,\left[\frac{3}{4},1\right)\,,\ldots\right\}$$

– множество всех, открытых справа, двоичных полуинтервалов, $\mathrm{A}=\mathrm{A}_0\cup\{[0,1]\}$ и $\{h_I, I\in A\}$ – система Хаара, занумерованная всеми элементами множества А следующим образом: $h_{[0,1]}(t)=1$, $t\in[0,1)$, а для полуинтервала $I\in A_0$ значения функции Хаара $h_I(t)$ определяются следующим образом:

$$h_I(t)=\begin{cases}|I|^{-\frac{1}{2}}\,,\ t\in I^+,\\ \\ -|I|^{-\frac{1}{2}}\,,\ t\in I^-,\\ \\ 0,\ t\in[0,1]\backslash I.\end{cases}$$

Здесь $I^+(I^-)$ – левая (правая) половина двоичного полуинтервала $I\in A_0$, $I^+\in \mathrm{A}_0$, $I^-\in \mathrm{A}_0$, $|I|$ – мера Лебега двоичного полуинтервала I.

Всякая биекция $\pi : A\to A$ определяет оператор перестановок системы Хаара:

$$R_\pi f=\sum_{I\in A} f_I h_{\pi(I)},\quad f_I=\int\limits_0^1 f(t)h_I(t)dt,\ I\in A.$$

Оператор $R_\pi f$ переставляет функции Хаара в ряде Фурье-Хаара $\sum\limits_{I\in A} f_I h_I$ с помощью биекции $\pi : A\to A$, оставляя неподвижными коэффициенты Фурье-Хаара f_I.

Биекцию $\pi : A\to A$ назовем сохраняющей меру, если для любого $I\in A$ имеем $|\pi(I)|=|I|$.

Определение системы Хаара, занумерованной двоичными полуинтервалами и понятие сохраняющей меру биекции $\pi : A\to A$ впервые введены в работе [1] венгерским математиком Ф. Шипом.

Вопросы ограниченности величин

$$\|R_\pi\|_{L^p}=\|R_\pi\|_{L^p\to L^p}\,,\quad p\in(1,2)\cup(2,\infty)$$

для сохраняющих меру биекций $\pi : A\to A$, изучались в [1].

В [1], как следствие, получены необходимые и достаточные условия ограниченности указанных величин для сохраняющих меру биекций $\pi : A\to A$. Результаты работы [1] были уточнены и обобщены на произвольные биекции $\pi : A\to A$ в моей работе [2]. В моей работе [2], как следствие установлены оценки операторов $R_\pi f$ в пространствах L^p, $p \in (1,2) \cup (2,\infty)$ для произвольных биекций $\pi : A \to A$ через «нормы» этих биекций. «Норма» биекции $\pi : A \to A$ определяется так:

$$\|\pi\| = \sup_{I \in A_0} \left(\frac{\left| \bigcup_{J \subseteq I} \pi(J) \right|}{|I|} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Неограниченные операторы перестановок системы Хаара $R_\pi f$ в пространствах L^p, $p \in [1,2) \cup (2,\infty)$ изучались в моих работах [3], [4].

В частности, в моей работе [4], нами построен оператор $R_\beta : L^p \to L^q$, неограниченный для всех $p, q \in [1,2)$ и всех $p, q \in (2,\infty)$, где $\beta : A \to A$ сохраняющая меру биекция.

В настоящей статье приводятся числовые оценки снизу величин

$$\|R_\pi\|_{L^p} = \|R_\pi\|_{L^p \to L^p}, \quad p \in (1,2) \cup (2,\infty)$$

для всех сохраняющих меру биекций $\pi : A \to A$, отличных от тождественной. Биекцию $\pi : A \to A$ считаем тождественной, если для каждого $I \in A$ имеем $\pi(I) = I$.

Справедливы следующие 2 теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\pi : A \to A$ нетождественная сохраняющая меру биекция и $\|\pi\| = 1$. Тогда*

$$\|R_\pi\|_{L^p} \geq \begin{cases} \left(\dfrac{4^{\frac{p}{p-1}} + 4}{4\left(2^{\frac{p}{p-1}} + 1\right)} \right)^{\frac{p-1}{p}}, & (1 < p < 2), \\ \left(\dfrac{4^p + 4}{4(2^p + 1)} \right)^{\frac{1}{p}}, & (2 < p < \infty). \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть $\pi : A \to A$ нетождественная сохраняющая меру биекция и $\|\pi\| \neq 1$. Тогда*

$$\|R_\pi\|_{L^p} \geq \begin{cases} \left(\dfrac{2^{\frac{1}{p-1}} + 1}{3} \right)^{\frac{p-1}{p}}, & (1 < p < 2), \\ \left(\dfrac{2^{p-1} + 1}{3} \right)^{\frac{1}{p}}, & (2 < p < \infty). \end{cases}$$

Сравнивая оценки теорем 1 и 2 убеждаемся, что верна следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $\pi : A \to A$ нетождественная сохраняющая меру биекция. Тогда*

$$
\|R_\pi\|_{L^p} \geq \begin{cases} \left(\dfrac{2^{\frac{1}{p-1}}+1}{3}\right)^{\frac{p-1}{p}}, & (1<p<2), \\ \\ \left(\dfrac{2^{p-1}+1}{3}\right)^{\frac{1}{p}}, & (2<p<\infty). \end{cases}
$$

Приведенная теорема является оптимальным решением задачи: *для всех сохраняющих меру биекций* $\pi : A \to A$, *отличных от тождественной, указать такую постоянную* $\mathrm{M}_p > 1$, *зависящую только от* p, *что*

$$
\|R_\pi\|_{L^p \to L^p} \geq \mathrm{M}_p > 1 \quad (1<p<\infty,\ p \neq 2).
$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schipp F.* On equivalense of rearrangements of the Haar system in dyadic Hardy and BMO spaces // Analysis Math, 1990, vol. 16, pp. 135-141.
2. *Маршан Р.Б.* О перестановках системы Хаара в двоичных пространствах H и BMO // Математические заметки. 2006. Т. 80, № 4. С. 636-637.
3. *Маршан Р.Б.* О неограниченных операторах перестановок системы Хаара // Доклады АМАН. 2009. Т. 11, № 2. С. 25-26.
4. *Маршан Р.Б.* Об одной конструкции неограниченного оператора // Доклады АМАН. 2016. Т. 18, № 1. С. 21-22.

ABSTRACT

In the article the estimations of norm of operator of rearrangements of the Haar system in the spaces L^p, $p \in (1,2) \cup (2,\infty)$ are given.

Key words: operator of rearrangements, Haar system.

Abkhazian State University, Sukhum;
E-mail: ramgar28@rambler.ru

АННОТАЦИЯ

В статье приводятся числовые оценки нормы оператора перестановок системы Хаара в пространствах L^p, $p \in (1,2) \cup (2,\infty)$.

Ключевые слова: оператор перестановок, биекция, система Хаара.

Абхазский Государственный Университет, Сухум;
E-mail: ramgar28@rambler.ru