МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.958:5

Об одной математической модели распространения пассионарности

Кенетова Р.О.
Представлено академиком АМАН В.А. Нахушевой

Посвящается учителю А.М. Нахушеву

В современных условиях возрастает роль математического моделирования в анализе и прогнозе социальных процессов, межэтнических и межнациональных отношений. Межэтнические отношения реализуются через взаимодействие особей этносов, в особенности их пассионариев во времени и пространстве. Система отношений между этносами, проживающими в одной среде обитания, является синергетической и, следовательно, при их моделировании могут быть использованы методы теории самоорганизации [1] и нелинейного анализа.

Согласно Л.Н. Гумилеву [2] пассионарии - это особи, пассионарный импульс поведения которых превышает величину импульса инстинкта самосохранения. Здесь пассионарный импульс означает поведенческий импульс, направленный против инстинкта самосохранения. Пассионарное поле - поле, обусловленное наличием биохимической энергии, а этническое поле - поле поведения и аттрактивности членов этнической системы, возникающей на основе пассионарного поля [3, с. 115]. Нет сомнений в том, что на фазе подъема в процессе внутриэтнической эволюции необходимым условием стабилизации межэтнических отношений является гармония межпассионарных отношений.

Существенной особенностью межэтнических отношений является неразрывное взаимодействие значительного числа случайных событий и явлений в едином процессе, который можно интерпретировать как синергетическую систему. Следовательно, проблемы межэтнических и межнациональных отношений требуют привлечения, наряду с классическими математическим и статистическим анализами, теории вероятности, информатики, теории катастроф и синергетики Г. Хакена.

Система межэтнических отношений двух этносов X и Y, которые связаны между собой одним информационным пространством и одной средой обитания Ω, информационно изолированы от внешней среды.

В среде обитания Ω существует надежная система информационной связи, функционирующая в реальном масштабе времени t, и межэтнические отношения во временном интервале $0 < t < T$ определяются в основном их активным взаимодействием на информационном уровне.

В этносе Y в момент времени $t \in [0, T]$ имеется $y = y(t)$ людей, обладающих определенной системой информации S_{in}, весьма важной в гармонизации межэтнических отношений, а в этносе X – нет таковых. Этнос X в этот момент имеет $x = x(t)$ информации S_{in}, т.е. восприимчивых к S_{in}, а этнос Y $v(t)$ – индивидуумов.

Представители этноса Y численностью $y(t)$ в любой момент времени t от начального $t = 0$ до расчетного $t = T$ ведут активную информационную борьбу с $v(t)$ людьми своего этноса и с $x(t)$ из этноса X на предмет увеличения численности индивидуумов в среде обитания Ω, владеющих системой информации S_{in}.

Общая численность людей среды обитания остается неизменной во временном сегменте $0 \le t \le T$, и эта численность

$$m = x_0 + y_0 + v_0, \tag{1}$$

где

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

$$y(0) = y_0, \tag{3}$$

$$v(0) = v_0. \tag{4}$$

$z(t) = m - x(t) - y(t) - v(t)$ – численность индивидуумов в среде Ω, которые в момент времени $t \in [0, T]$, изолированной от системы S_{in} может произойти в том и только в том случае, когда он удален из среды обитания Ω или полностью воспринял систему информации S_{in} и принял обязательство не вести информационную борьбу с целью увеличения численности людей, владеющих этой системой [4].

По аналогии с детерминистической моделью теории эпидемии можно предположить следующую математическую модель информационного взаимодействия людей в среде обитания Ω:

$$\frac{dx}{dt} = -\beta xy, \tag{5}$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta xy + \delta vy - \gamma y, \tag{6}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\delta vy, \tag{7}$$

$$\frac{dz}{dt} = \gamma y. \tag{8}$$

Здесь, в этой модели, β, δ – постоянные величины – коэффициенты инормационного взаимодействия, и предполагается, что в интервале времени $dt \equiv \Delta t$ численность людей, обладающих S_{in};покидает вследствие их изоляции $\gamma y(t)dt$ индивидуумов, где γ – постоянный коэффициент покидания или изоляции.

Из системы четырех дифференциальных уравнений (5)-(7) после их почленного сложения получаем:

$$\frac{d}{dt}\big[x(t) + y(t) + v(t) + z(t)\big] = 0. \tag{9}$$

Гипотеза (1) говорит о том, что

$$z(0) = 0. \tag{10}$$

Уравнение (9) вместе с условиями Коши (2)-(4) и (10) показывают, что

$$x(t) + y(t) + v(t) + z(t) = m, \qquad 0 \le t \le T. \tag{11}$$

Равенство (11) согласуется с нашим предположением о неизменности общей численности людей в среде Ω во временном сегменте $[0, T]$.

При $\beta \ne 0$ из уравнений (5) и (8) имеем:

$$\frac{dx}{dz} = -\rho x, \qquad \rho = \frac{\gamma}{\beta}. \tag{12}$$

Число ρ, как и в теории эпидемии, характеризует относительную частоту удаления (изоляции).

В силу (2) и (10) дифференциальное уравнение (12) эквивалентно уравнению

$$x(t) = x_0 \exp\big[-\frac{z(t)}{\rho}\big]. \tag{13}$$

Аналогично из (7) и (8) в соответствии с (4) получим:

$$\frac{dv}{dz} = -\rho v \to v(t) = v_0 \exp\big[-\frac{z(t)}{\rho_0}\big], \rho_0 = \frac{\gamma}{\delta}. \tag{14}$$

Подставляя в уравнение (8) значение $y(t)$ из (11) и взяв $x(t)$ и $v(t)$ из формулы (13), (14) получим, что $z = z(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{dz}{dt} = \gamma\big[m - z - x_0 \exp\big[-\frac{z}{\rho}\big] - v_0 \exp\big[-\frac{z}{\rho}\big]\big]. \tag{15}$$

и начальному условию (10).

Из уравнения (6) непосредственно вытекает интуитивно ясное заключение о том, что система информации S_{in} в среде обитания Ω не будем распространяться, если $y_0(\beta x_0 - \gamma + {} + \delta v_0)$ не будет положительным числом.

Пусть

$$y_0 > 0, \rho < x_0 + \frac{\delta v_0}{\beta}. \tag{16}$$

Как видно из (10), (15) и (16), при

$$z'(0) = \gamma y_0 > 0. \tag{17}$$

Правая часть уравнения (15), т.е. функция

$$\varphi(z) = \gamma\big[m - z - x_0 exp\big[-\frac{z}{\rho}\big] - v_0 exp\big[-\frac{z}{\rho}\big]\big],$$

является аналитической функцией переменной $z \geq 0$; $\varphi(0) = (m - x_0 - v_0) = \gamma y_0 > 0$, $\varphi(z)$ при $z \to +\infty$, стремится $-\infty$. Так как

$$\varphi'(z) = \gamma\big[\frac{x_0}{\rho} exp\left(-\frac{z}{\rho}\right) + \frac{v_0}{\rho_0} exp\left(-\frac{z}{\rho}\right) - 1\big],$$

то

$$\varphi'(0) = \beta x_0 + \delta v_0 - \gamma. \tag{18}$$

Из (16) и (18) следует, что $\varphi'(0) > 0$. Неравенство (17) и эти свойства говорят о том, что функция $z'(t)$ колоколообразной симметричной кривой.

Модель (15) можно упростить, если в разложениях

$$\exp\left(-\frac{z}{\rho}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/\rho)^k}{(-1)^k k!}, \exp\left(-\frac{z}{\rho_0}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/\rho_0)^k}{(-1)^k k!}$$

ограничиться до члена, содержащего z^2, т.е., если положить, что

$$\exp\left(-\frac{z}{\rho}\right) = 1 - \frac{z}{\rho} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\rho}\right)^2, \ \ \exp\left(-\frac{z}{\rho_0}\right) \approx 1 - \frac{z}{\rho_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\rho_0}\right)^2.$$

Другими словами, модель (15) можно аппроксимировать уравнением:

$$z'(t) = \gamma\Big\{m - z - x_0\Big[1 - \frac{z}{\rho} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\rho}\right)^2\Big] - v_0\Big[1 - \frac{z}{\rho_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\rho_0}\right)^2\Big]\Big\}, \qquad (19)$$

т.е. следующим дифференциальным уравнением первого порядка:

$$z'(t) = az^2 - 2bz + c, \qquad 0 \le t \le T$$

с начальным условием (10), где

$$a = -\frac{\gamma}{2}\left(\frac{x_0}{\rho^2} + \frac{v_0}{\rho^2}\right), b = \frac{\gamma}{2}\left(\frac{x_0}{\rho} + \frac{v_0}{\rho} - 2\right), c = \gamma y_0. \qquad (20)$$

Уравнение (19) в теории дифференциальных уравнений известно как уравнение Риккати и имеет стационарное решение z_1 тогда и только тогда, когда

$$az_s^2 - 2bz_s + c = 0. \qquad (21)$$

Поскольку $ac < 0$, то величина

$$z_s = b + \sqrt{b^2 - ac} \qquad (22)$$

представляет собой единственное неотрицательное решение квадратного уравнения (21).

Уравнение (19) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\exp[-(4bz_s - a)t]}{z_s - z} = -2b\exp[-(4bz_s - a)t]. \qquad (23)$$

Принимая во внимание, что

$$\int\limits_0^t \exp[(a - 4bz_s)\tau]d\tau = \frac{\exp[(a - 4bz_s)t] - 1}{a - 4bz_s},$$

из (23) и начального условия (10) получаем:

$$z(t) = z_s + \frac{(a - 4bz_s)t}{2bz_s - (a - 2bz_s)\exp[(4bz_s - a)t]}. \qquad (24)$$

Формула (24) является весьма простой, но вместе с тем интересной моделью для прогнозирования динамики численности индивидуумов в среде обитания Ω, которые изолированы от системы S_{in}.

Рассмотрим этническое поле, то есть такое поле, которое обеспечивает взаимодействие членов этноса и регулирует их совместную целенаправленную деятельность. Этническое поле характеризуется пассионарностью, которая определяется как избыток биохимической энергии живого вещества, подавляющий инстинкт самосохранения и определяющий способность к целенаправленным сверхнапряжениям. В теории этнических полей выделяют четыре основных процесса, обеспечивающих существование и распределение пассионарности: расплывание, перемещение, индукция и утрата.

Рассмотрим ландшафт, заселенный некоторым этносом. Пусть в каждой точке (x, y, t) этой территории в момент времени t пассионарность [5] определяется функцией

$u = u(x, y, t)$. Если различным частям ландшафта соответствует различный уровень пассионарности, то в силу свойства “заразительности” пассионарности [2, с. 336] будет происходить движение ее от более насыщенных пассионарностью частей к менее насыщенным. Для вывода уравнения распространения пассионарности выделим внутри ландшафта произвольную область Ω, ограниченную гладкой замкнутой кривой Γ, и рассмотрим изменение количества пассионарности на этой площади за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$.

Будем предполагать, что пассионарный поток, то есть количество пассионарности p, проходящий через единицу длины кривой за единицу времени вычисляется по формуле

$$p = -\left[k\frac{\partial u}{\partial \overline{n}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{n}}u\right], \qquad (25)$$

где $k = k(x, y, t)$ – коэффициент, учитывающий скорость “расплывания” пассионарности; $\phi = \phi(x, y, t)$ – коэффициент, учитывающий скорость и направление “перемещения” пассионарности, n – внутренняя нормаль к кривой Γ.

С учетом формулы (25), количество пассионарности P_0, проходящей через кривую Γ за единицу времени t можно определить соотношением

$$P_0 = -\int\limits_{\Gamma}\left[k\frac{\partial u}{\partial \overline{n}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{n}}\right]d\Gamma, \qquad (26)$$

где $d\Gamma$ – элемент длины. Нетрудно заметить, что в силу формулы (26) через кривую Γ за промежуток времени Δt выходит количество пассионарности, равное

$$P_1 = \int\limits_{t_1}^{t_2} p_0 dt. \qquad (27)$$

Пусть S - площадь области Ω. Количество пассионарности, необходимое для изменения уровня пассионарности площади S на $\Delta u = u(x, y, t_2) - u(x, y, t_1)$ равно

$$P_2 = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{S} \frac{\partial u}{\partial t} dS, \qquad (28)$$

где S- элемент площади.

Утрата количества пассионарности за промежуток времени Δt вычисляется по формуле

$$P_3 = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{S} \left[\alpha(x, y, t) - \beta(x, y, t) - \gamma(x, y, t)u(x, y, t)\right] u(x, y, t) dS, \qquad (29)$$

где $\alpha(x, y, t)$ – коэффициент, учитывающий индукцию пассионарности (увеличение ее запасов); $\beta(x, y, t)$ – коэффициент, учитывающий утрату пассионарности, связанную с приспособлением и переустройством ландшафта; $\gamma(x, y, t)$ – коэффициент, учитывающий утрату пассионарности в результате некоторого внутреннего соперничества.

Составим теперь уравнение баланса пассионарности, которое будет рассматриваться в области Ω. Из соотношений (27)-(29) следует, что$p_2 = p_1 + p_3$, т.е.

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega = -\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\Gamma}\left[k\frac{\partial u}{\partial \overline{n}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{n}}u\right]d\Gamma + \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\Omega} \left[\alpha - \beta - \gamma u\right] u d\Omega. \qquad (30)$$

В силу формулы Грина

$$\int_{\Gamma} \left[k\frac{\partial u}{\partial \overline{n}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{n}} u \right] d\Gamma = \int_{S} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{n}} u \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[k\frac{\partial u}{\partial \overline{n}} \right] \right) dS. \tag{31}$$

Из соотношения (30) с учетом (31) получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(k\frac{\partial u}{\partial \overline{n}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(u\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{n}} \right) + (\alpha - \beta)u - \gamma u^2. \tag{32}$$

Уравнение (32) назовем уравнением распространения пассионарности для неоднородного ландшафта. Если известен начальный запас пассионарности (пассионарный толчок)

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \tag{33}$$

и распределение его на границе в виде

$$u|_{\Gamma} = 0, \tag{34}$$

то мы приходим к начально – краевой задаче (33), (34) для уравнения (32).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хакен Г.* Синергетика. Иерархия неустойчивости в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир 1985. 423 с.
2. *Гумилев Л.Н.* Этногенез и биосфера земли. М.: Танаис ДИДИК 1994 г.
3. *Нахушев А.М.* Математические методы и модели в исторических исследованиях. Нальчик: Изд-во М. и В. Котляровых, 2012. 144 с.
4. *Бейли Н.* Математика в биологии и медицине. 1970. 326 с.
5. *Нахушев А.М., Кушхов А.А.* К вопросу информационно-математического моделирования межэтнических конфликтов и этногенеза // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 1999. Т. 4, № 1. С. 55-59.

ABSTRACT

We construct a mathematical process model of passionarity propagation in the ethnic field. The model is based on the differential equations with second order partial derivatives.

Keywords. Ethnic, passionarity, passionarity propagation, passionary drive, ethnic field.

Institute of Applied Mathematics and Automation, Nalchik; raisa.kenetova@mail.ru

АННОТАЦИЯ

В работе строится математическая модель процесса распространения пассионарности в этническом поле. Данная модель основывается на дифференциальном уравнении в частных производных второго порядка.

Ключевые слова. Этнос, пассионарность, этническое поле, пассионарный импульс, распространение пассионарности.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение "Институт прикладной математики и автоматизации", Нальчик; raisa.kenetova@mail.ru