УДК 517.91
DOI: 10.47928/1726-9946-2021-21-2-9-14

Задача для обыкновенного дифференциального уравнения с общим краевым условием

Гадзова Л.Х.

Представлено академиком АМАН А.В. Псху

1. В интервале $0 < x < 1$ рассмотрим уравнение

$$\partial_{0x}^{\alpha} u(x) + \lambda u(x) = f(x), \tag{1}$$

где $\alpha \in]1, 2]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\partial_{0x}^{\alpha} u(x)$ – регуляризованная дробная производная (производная Капуто) [1, с. 11]:

$$\partial_{0x}^{\alpha} u(x) = D_{0x}^{\alpha-2} u^{''}(x), \quad 1 < \alpha \le 2, \tag{2}$$

где D_{0x}^{α}– оператор дробного интегро-дифференцирования порядка α в смысле Римана – Лиувилля [1, с. 9] по переменной x, определяемый равенством:

$$D_{0x}^{\alpha} u(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_0^x u(t)(x-t)^{-\alpha-1} dt, & \alpha < 0, \\ u(x), & \alpha = 0, \\ \frac{d^n}{dx^n} D_{0x}^{\alpha-n} u(x), & n-1 < \alpha \le n,\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

В литературе оператор (2) известен также под названием оператора Герасимова – Капуто [2, 3].

За последние годы существенно возрос интерес к исследованию дифференциальных уравнений дробного порядка, который стимулируется практическими приложениями в различных областях науки, например, в физике и математическом моделировании. На сегодняшний день имеется достаточно большой список работ посвященных как собственно теории дробного исчисления [1], [4-10], так и различным ее приложениям [11-13].

Работа [14] является одной из первых работ, посвященных дифференциальным уравнениям дробного порядка. К теории дробных дифференциальных уравнений относятся и работы [4], [6-9]. Задача Коши для уравнения (1) была решена в [15, с. 17]. В работах [16], [17] и [18] для уравнения (1) с запаздывающим аргументом получены решения задачи Коши, задачи Дирихле и задачи Неймана. Так же следует отметить работы [19], [20], где получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости краевых задач для линейных функционально-дифференциальных уравнений.

В работе исследуется обыкновенное дифференциальное уравнение дробного порядка с регуляризованной дробной производной. Найдено общее представление решения для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с общим краевым условием, найдено условия однозначной разрешимости и построено явное представление решения.

Регулярным решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(x)$, имеющую абсолютно непрерывную производную первого порядка на отрезке [0,1] и удовлетворяющую уравнению (1) для всех $x \in]0,1[$.

Задача. *Найти регулярное решение уравнения (1) в интервале* $]0,1[$, *удовлетворяющее условиям*

$$u(0) = u_0, \tag{3}$$

$$\ell[u] = u_1, \tag{4}$$

где u_0, u_1 *– заданные действительные числа,* ℓ *– линейный ограниченный функционал в* $C^1[0,1]$.

2. Пусть $u(x)-$ регулярное решение задачи (1), (3), (4). Для нахождения решения задачи (1), (3), (4) воспользуемся решением задачи Коши для уравнения (1), которое представимо в виде (см. например [15]):

$$u(x) = \int\limits_0^x f(t)(x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda(x-t)^\alpha)dt + u'(0)xE_{\alpha,2}(-\lambda x^\alpha) + u(0)E_{\alpha,1}(-\lambda x^\alpha), \tag{5}$$

где

$$E_{\delta,\mu}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\delta j + \mu)}$$

– функция Миттаг–Леффлера (см, например, [10, 15]).

Далее будем обозначать через

$$(g * h)(x) = \int\limits_0^x g(t)h(x-t)dt$$

свертку Лапласа функций $g(x)$ и $h(x)$.

В представлении (5) $u'(0)$ является неизвестной константой, требующей определения. Для определения коэффициента $u'(0)$ удовлетворяем представление (5) условию (4):

$$\ell(u) = \ell\left[f * x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda x^\alpha)\right] + u'(0)\ell\left[xE_{\alpha,2}(-\lambda x^\alpha)\right] + u(0)\ell\left[E_{\alpha,1}(-\lambda x^\alpha)\right] = u_1.$$

Отсюда находим $u'(0)$:

$$u'(0) = \frac{u_1 - \ell\left[f * x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda x^\alpha)\right] - u_0\ell\left[E_{\alpha,1}(-\lambda x^\alpha)\right]}{\ell\left[xE_{\alpha,2}(-\lambda x^\alpha)\right]}.$$

Используя свойства линейного ограниченного функционала ℓ в пространстве $C^1[0,1]$, можно получить (см. [21, с. 222], [22, с. 126])

$$\ell\left[f * x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda x^\alpha)\right] = \ell\left[\int\limits_0^x f(t)(x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda(x-t)^\alpha)\right]dt =$$

$$= \ell\left[\int_0^1 f(t)S_t x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda x^\alpha)\right]dt = \int_0^1 f(t)\ell\left[S_t x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda x^\alpha)\right]dt,$$

$$S_t v(x) = \begin{cases} v(x-t), & \text{если} \quad x \geq t, \\ 0, & \text{если} \quad x < t. \end{cases}$$

После элементарных преобразований, подставляя найденное значение в (5), получаем представление решения задачи (1), (3), (4) в виде

$$u(x) = \int_0^1 f(t)G(x,t)dt + u_1\frac{xE_{\alpha,2}(-\lambda x^\alpha)}{\ell\left[xE_{\alpha,2}(-\lambda x^\alpha)\right]} + u_0\left[D_{1t}^{\alpha-1}G(x,t)\right]\Big|_{t=0}, \tag{6}$$

где

$$G(x,t) = S_t x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda x^\alpha) - \frac{\ell\left[S_t x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda x^\alpha)\right]xE_{\alpha,2}(-\lambda x^\alpha)}{\ell\left[xE_{\alpha,2}(-\lambda x^\alpha)\right]}.$$

Таким образом мы показали, что регулярное решение уравнения (1) имеет вид (6). Отсюда, в частности, следует единственность при выполнении условия $\ell\left[xE_{\alpha,2}(-\lambda x^\alpha)\right] \neq 0$.

Докажем теперь, что построенное решение действительно является решением задачи (1), (3), (4). Проверим выполнение краевых условий

$$\left\{f * x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda x^\alpha) - \frac{\ell\left[f * x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda x^\alpha)\right]xE_{\alpha,2}(-\lambda x^\alpha)}{\ell\left[xE_{\alpha,2}(-\lambda x^\alpha)\right]} + \right.$$

$$\left. + u_1\frac{xE_{\alpha,2}(-\lambda x^\alpha)}{\ell\left[xE_{\alpha,2}(-\lambda x^\alpha)\right]} + u_0\left(E_{\alpha,1}(-\lambda x^\alpha) - \frac{\ell\left[E_{\alpha,1}(-\lambda x^\alpha)\right]xE_{\alpha,2}(-\lambda x^\alpha)}{\ell\left[xE_{\alpha,2}(-\lambda x^\alpha)\right]}\right)\right\}\Bigg|_{x=0} =$$

$$= u_0E_{\alpha,1}(-\lambda x^\alpha)|_{x=0} = u_0.$$

Покажем теперь, что $\ell[u] = u_1$. Здесь нужно использовать свойства линейного функционала [22, с. 126]. Имеем

$$\ell\left\{f * x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda x^\alpha) - \frac{\ell\left[f * x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda x^\alpha)\right]xE_{\alpha,2}(-\lambda x^\alpha)}{\ell\left[xE_{\alpha,2}(-\lambda x^\alpha)\right]} + \right.$$

$$\left. + u_1\frac{xE_{\alpha,2}(-\lambda x^\alpha)}{\ell\left[xE_{\alpha,2}(-\lambda x^\alpha)\right]} + u_0\left(E_{\alpha,1}(-\lambda x^\alpha) - \frac{\ell\left[E_{\alpha,1}(-\lambda x^\alpha)\right]xE_{\alpha,2}(-\lambda x^\alpha)}{\ell\left[xE_{\alpha,2}(-\lambda x^\alpha)\right]}\right)\right\} =$$

$$= u_1\frac{\ell\left[xE_{\alpha,2}(-\lambda x^\alpha)\right]}{\ell\left[xE_{\alpha,2}(-\lambda x^\alpha)\right]} + \frac{\ell\left[f * x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda x^\alpha)\right]\ell\left[xE_{\alpha,2}(-\lambda x^\alpha)\right]}{\ell\left[xE_{\alpha,2}(-\lambda x^\alpha)\right]} +$$

$$+ u_0\left(\frac{\ell\left[E_{\alpha,1}(-\lambda x^\alpha)\right]\ell\left[xE_{\alpha,2}(-\lambda x^\alpha)\right]}{\ell\left[xE_{\alpha,2}(-\lambda x^\alpha)\right]} - \frac{\ell\left[E_{\alpha,1}(-\lambda x^\alpha)\right]\ell\left[xE_{\alpha,2}(-\lambda x^\alpha)\right]}{\ell\left[xE_{\alpha,2}(-\lambda x^\alpha)\right]}\right) -$$

$$- \frac{\ell\left[f * x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda x^\alpha)\right]\ell\left[xE_{\alpha,2}(-\lambda x^\alpha)\right]}{\ell\left[xE_{\alpha,2}(-\lambda x^\alpha)\right]} = u_1.$$

Далее, учитывая закон композиции операторов дробного интегро-дифференцирования и свойства свертки функций [23, с. 520], будем иметь:

$$\partial_{0x}^{\alpha}\left(f*x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda x^{\alpha})\right)=\frac{d}{dx}D_{0x}^{\alpha-2}\left(f*x^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(-\lambda x^{\alpha})\right)=$$

$$=\frac{d}{dx}\left(f*x^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(-\lambda x^{\alpha})*\frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)=$$

$$=\frac{d}{dx}\left(f*E_{\alpha,1}(-\lambda x^{\alpha})\right)=f*x^{-1}E_{\alpha,0}(-\lambda x^{\alpha})-f(x)E_{\alpha,1}(0)=$$

$$=-f*\lambda x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda x^{\alpha})-f(x).$$

Воспользовавшись последним равенством, докажем, что функция $u(x)$, определяемая равенством (6), действительно является решением задачи (1), (3), (4).

$$\partial_{0x}^{\alpha}\left\{f*x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda x^{\alpha})-\frac{\ell\left[f*x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda x^{\alpha})\right]xE_{\alpha,2}(-\lambda x^{\alpha})}{\ell\left[xE_{\alpha,2}(-\lambda x^{\alpha})\right]}+\right.$$

$$\left.+u_1\frac{xE_{\alpha,2}(-\lambda x^{\alpha})}{\ell\left[xE_{\alpha,2}(-\lambda x^{\alpha})\right]}+u_0\left(E_{\alpha,1}(-\lambda x^{\alpha})-\frac{\ell\left[E_{\alpha,1}(-\lambda x^{\alpha})\right]xE_{\alpha,2}(-\lambda x^{\alpha})}{\ell\left[xE_{\alpha,2}(-\lambda x^{\alpha})\right]}\right)\right\}+$$

$$+\lambda\left\{f*x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda x^{\alpha})-\frac{\ell\left[f*x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda x^{\alpha})\right]xE_{\alpha,2}(-\lambda x^{\alpha})}{\ell\left[xE_{\alpha,2}(-\lambda x^{\alpha})\right]}+\right.$$

$$\left.+u_1\frac{xE_{\alpha,2}(-\lambda x^{\alpha})}{\ell\left[xE_{\alpha,2}(-\lambda x^{\alpha})\right]}+u_0\left(E_{\alpha,1}(-\lambda x^{\alpha})-\frac{\ell\left[E_{\alpha,1}(-\lambda x^{\alpha})\right]xE_{\alpha,2}(-\lambda x^{\alpha})}{\ell\left[xE_{\alpha,2}(-\lambda x^{\alpha})\right]}\right)\right\}=f(x).$$

Таким образом сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям*

$$f(x)\in C[0,1],\quad f(x)=D_{0x}^{\alpha-2}g(x),\quad g(x)\in L[0,1]$$

и выполнено неравенство

$$\ell\left[xE_{\alpha,2}(-\lambda x^{\alpha})\right]\neq 0. \tag{7}$$

Тогда решение задачи существует, единственно и имеет вид (6).

Замечание. Покажем, что если условие (7) нарушается, то есть

$$\ell\left[xE_{\alpha,2}(-\lambda x^{\alpha})\right]=0, \tag{8}$$

то решение однородной задачи не единственно.

Для этого рассмотрим функцию $\widetilde{u}(x)=xE_{\alpha,2}(-\lambda x^{\alpha})$. Тогда $\widetilde{u}(x)$ является решением однородной задачи

$$\partial_{0x}^{\alpha}\widetilde{u}(x)+\lambda\widetilde{u}(x)=0,$$

$$\widetilde{u}(0)=0,\quad \ell(\widetilde{u})=\ell[xE_{\alpha,2}(-\lambda x^{\alpha})]=0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

2. *Килбас А.А.* Теория и приложения дифференциальных уравнений дробного порядка (курс лекций). Методологическая школа-конференция «Математическая физика и нанотехнологии». Самара, 2009. 121 с.
3. *Новожженова О.Г.* Биография и научные труды Алексея Никифоровича Герасимова. О линейных операторах, упруго-вязкости, элевтерозе и дробных производных. М.: Перо, 2018. 235 с.
4. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука. 1966. 672 с.
5. *Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН Армянской ССР. Матем. 1968. Т. 3, № 1. С. 3-28.
6. *Джрбашян М.М.* Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма-Лиувилля // Изв. АН Армянской ССР. 1970. Т. 5, № 2. С. 71-96.
7. *Oldham K.B., Spanier J.* The fractional calculus. N.-Y.; L. Acad. press. 1974. 235 p.
8. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. 1987. 688 с.
9. *Ozturk I.* On the theory of fractional differential equation // Reports of Adyghe (Circassian) International Academy of Scienses, 1998, vol. 3, no. 2, pp. 3-39.
10. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and applications of fractional differential equations // North-Holland Math. Stud., Elsevier, Amsterdam, 2006, vol. 204.
11. *Bagley R.L., Torvik P.J.* Fractional Calculus in the Transient Analysis of Viscoelastically Damped Structures //AIAA Journal, 1985, vol. 23, no. 6, pp. 918-925.
12. *Hilfer R.* Applications of fractional calculus in physics. World Scientific, River Edge, NJ, USA. 2000. 472 p.
13. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. Ульяновск: Изд.«Артишок». 2008. 512 с.
14. *Barrett J.H.* Differential equations of non-integer order // Canadian J. Math., 1954, vol. 6, no. 4, pp. 529-541.
15. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
16. *Mazhgikhova M.G.* Initial and boundary value problems for ordinary differential equation of fractional order with delay // Chelyab. Fiz.-Mat. Zh., 2018, vol. 3, no. 1, pp. 27-37.
17. *Mazhgikhova M.G.* Dirichlet problem for a fractional-order ordinary differential equation with retarded argument // Differential Equations, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 185-192.
18. *Мажгихова М.Г.* Задача Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Изв. Кабардино-Балкар. науч. центра РАН. 2016. Т. 70, № 2. С. 15-20.
19. *Бравый Е.И.* О положительных периодических решениях функционально–дифференциальных уравнений первого порядка // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2016. Т. 46, № 2. С. 21-28.
20. *Бравый Е.И.* О неулучшаемых условиях разрешимости краевых задач для функционально–дифференциальных уравнений первого порядка // Динамические системы. 2016. Т. 10(38), № 1. С. 23-36.
21. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.

22. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.

23. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 749 с.

ABSTRACT

For an ordinary differential equation of fractional order with a general boundary condition, a general representation of the solution of the equation is found, a condition of unique solvability is found, and an explicit representation of the solution is constructed.

Keywords: fractional order equations, functional, Gerasimov-Caputo fractional derivative, Mittag-Leffler function.

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik;
E-mail: macaneeva@mail.ru

АННОТАЦИЯ

Для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с общим краевым условием найдено общее представление решения уравнения, найдено условие однозначной разрешимости и построено явное представления решения.

Ключевые слова: уравнения дробного порядка, функционал, дробная производная Герасимова-Капуто, функция Миттаг-Леффлера.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик;
E-mail: macaneeva@mail.ru