УДК 517.9
DOI: 10.47928/1726-9946-2021-21-2-15-27

Нагруженные уравнения, возникающие при синтезе управления нагревом стержня движущимися источниками

Гашимов В.А.

Представлено академиком АМАН А.В. Псху

1. Введение. В статье изучается задача синтеза управления процессом нагрева стержня движущимися по стержню точечными источниками. Текущие значения мощностей и управления движением источников определяются по результатам проводимых замеров температуры в заданных точках стержня. В работе предлагается использовать линейную зависимость управляющих воздействий мощностью и движением источников от замеренных значений температуры. После подстановки этих зависимостей в дифференциальное уравнение получается нагруженное дифференциальное уравнение, точками нагружения в котором являются точки замеров состояния. Постоянные коэффициенты, участвующие в этих зависимостях, являются искомыми параметрами обратной связи, которые требуется оптимизировать. Таким образом задача синтеза управления движущимися источниками тепла с нелинейной обратной связью приводится к задаче параметрического оптимального управления, описываемой нагруженным уравнением.

Известно, что задачи управления объектами с обратной связью, описываемые как уравнениями с обыкновенными, так и с частными производными, являются наиболее сложными как в теории оптимального управления, так и для практики их применения [1-4].

Если для исследования задач синтеза управления объектами с сосредоточенными параметрами имеются достаточно общие подходы [1], [2], [5], то для объектов с распределенными параметрами [1], [3], [4] таких подходов пока не имеется. Это связано со сложностью, разнообразием и математических моделей и вариантов соответствующих постановок задач управления для таких объектов [1]. Большую сложность представляет и реализация известных в настоящее время методов управления объектами с обратной связью в реальном масштабе времени, она требует использования дорогостоящих средств телемеханики, измерительной и вычислительной техники [1], [3], [4].

Тем не менее на практике, как известно, функционирует достаточно большое число систем автоматического управления, автоматического регулирования как объектами с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами [1-9].

В работе задача оптимизации параметров обратной связи приводится к задаче параметрического оптимального управления. Для ее решения предлагается применить численные методы оптимизации первого порядка с использованием полученных формул для компонентов градиента целевого функционала по оптимизируемым параметрам линейной обратной связи.

Изложенный подход к синтезу управления движущимися источниками можно использовать при управлении другими эволюционными процессами, описываемыми другими типами дифференциальных уравнений и видами начально-краевых условий.

2. Постановка задачи. Рассмотрим следующую задачу, описывающую процесс нагрева стержня движущимися точечными источниками тепла [3]:

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) - \lambda_0[u(x,t)-\theta] + \sum_{i=1}^{N_c} q_i\,(t)\,\delta\,(x - z_i\,(t)), \tag{1}$$

$$x \in (0,l), \quad t \in (0,T],$$

$$u_x(0,t) = \lambda_1(u(0,t)-\theta), \quad u_x(l,t) = -\lambda_2(u(l,t)-\theta), \quad t \in (0,T]. \tag{2}$$

Здесь: $u(x,t)$ – температура стержня в точке $x \in [0,l]$ в момент времени t; l – длина стержня; T – продолжительность процесса нагрева; a, λ_0, λ_1, λ_2 – заданные параметры процесса нагрева; $q_i\,(t)$ и $z_i\,(t)$ кусочно-непрерывные функции по t, определяющие мощность и месторасположение движущегося по стержню i-го источника, причем

$$\underline{q_i} \le q_i\,(t) \le \overline{q_i}, \quad t \in [0,T]\,, \quad i = 1,2,\ldots,N_c, \tag{3}$$

$$0 \le z_i\,(t) \le l, \quad t \in [0,T]\,, \quad i = 1,2,\ldots,N_c. \tag{4}$$

θ – постоянная во времени температура внешней среды, точное значение которой не задано, но известно множество Θ возможных значений θ и функция плотности распределения $\rho_\Theta(\theta)$ такая, что

$$\rho_\Theta(\theta) \ge 0, \quad \theta \in \Theta, \quad \int_\Theta \rho_\Theta(\theta)d\theta = 1,$$

где $\underline{q_i}$, $\overline{q_i}$ – заданы; N_c – число точечных источников; $\delta(\cdot)$ – функция Дирака.

Температура стержня в начальный момент времени не задана, но задано множество ее возможных значений, определяемых параметрическими функциями, зависящими от s-мерного вектора параметров p:

$$u(x,0) = \varphi(x;p), \quad x \in [0,l], \quad p \in \mathrm{P} \subset \mathrm{R}^s. \tag{5}$$

Здесь P – заданное множество значений параметров начальной функции $\varphi(x;p)$, при этом известна функция плотности распределения $\rho_\mathrm{P}(p) \ge 0$ такая, что

$$\rho_\mathrm{P}(p) \ge 0, \quad p \in \mathrm{P}, \quad \int_\mathrm{P} \rho_\mathrm{P}(p)dp = 1.$$

Траектории движения точечных источников $z_i\,(t)$, являются управляемыми и определяются уравнениями

$$\ddot{z}_i(t) = a_i\dot{z}_i(t) + b_i z_i(t) + \vartheta_i(t), \quad t \in (0,T], \tag{6}$$

$$z_i(0) = z_i^0, \quad \dot{z}_i(0) = z_i^1, \quad i = 1,2,\ldots,N_c. \tag{7}$$

Здесь a_i, b_i – заданные параметры движения источников; $(z_i^0; z_i^1)$ – заданные начальные положения источников; $\vartheta_i(t)$ – кусочно-непрерывная функция, определяющая управление движением i-го источника, удовлетворяющая условиям:

$$\underline{\vartheta_i} \le \vartheta_i(t) \le \overline{\vartheta_i}, \quad t \in [0,T], \quad i = 1,2,\dots,N_c. \tag{8}$$

$\underline{\vartheta_i}$, $\overline{\vartheta_i}$, $i = 1,2,\dots,N_c$ – заданы.

Задача заключается в определении управляющих рассматриваемым процессом функций: $q=q(t)=(q_1(t),q_2(t),...,q_{N_c}(t))$, $\vartheta=\vartheta(t)=(\vartheta_1(t),\vartheta_2(t),...,\vartheta_{N_c}(t))$, $w=w(t)=(q(t),\vartheta(t))$, минимизирующих заданный функционал:

$$J(w) = \int\limits_{\mathrm{P}} \int\limits_{\Theta} I(w;p,\theta)\rho_\Theta(\theta)\rho_{\mathrm{P}}(p)d\theta dp, \tag{9}$$

$$I(w;p,\theta) = \int\limits_0^l \mu(x)[u(x,T) - U(x)]^2 dx + \tag{10}$$

$$+\varepsilon_1 \left\| q(t) - \hat{q} \right\|^2_{L_2^{N_c}[0,T]} + \varepsilon_2 \left\| \vartheta(t) - \hat{\vartheta} \right\|^2_{L_2^{N_c}[0,T]}.$$

Здесь $U(x)$ – заданная кусочно-непрерывная функция, определяющая желаемое конечное распределение температуры на стержне; $\mu(x) \ge 0$, $x \in [0,l]$ – весовая функция; $u(x,t) = u(x,t;w,p,\theta)$ – решение начально-краевой задачи (1), (2), (5) при допустимых заданных управлении w, параметрах начального условия $\varphi(x;p)$ и температуре внешней среды θ.

Пусть в заданных N_o точках стержня $\xi_j \in [0,l]$, $j = 1,2,\dots,N_o$, непрерывно проводятся замеры температуры:

$$u_j(t) = u\left(\xi_j, t\right), \quad t \in [0,T], \quad \xi_j \in [0,l], \quad j = 1,2,\dots,N_o.$$

Результаты этих замеров используем для формирования текущих значений управлений в виде следующих зависимостей нелинейных относительно расстояния между источниками и точками замера и линейных относительно замеренных $u\left(\xi_j,t\right)$ и номинальных $\tilde{\gamma}_i^j$ значений j-ой точки замера.

$$q_i(t) = \sum_{j=1}^{N_o} \left(\alpha^1_{ij}|z_i\left(t\right) - \xi_j|^2 + \alpha^2_{ij}|z_i\left(t\right) - \xi_j| + \alpha^3_{ij}\right)\left[u\left(\xi_j,t\right) - \tilde{\gamma}_i^j\right], \tag{11}$$

$$t \in [0,T], \quad i = 1,2,\dots,N_c,$$

$$\vartheta_i(t) = \sum_{j=1}^{N_o} \left(\beta^1_{ij}|z_i\left(t\right) - \xi_j|^2 + \beta^2_{ij}|z_i\left(t\right) - \xi_j| + \beta^3_{ij}\right)\left[u\left(\xi_j,t\right) - \tilde{\gamma}_i^j\right], \tag{12}$$

$$t \in [0,T], \quad i = 1,2,\dots,N_c.$$

Здесь постоянные α^1_{ij}, α^2_{ij}, α^3_{ij}, β^1_{ij}, β^2_{ij}, β^3_{ij}, $\tilde{\gamma}_i^j$, $i = 1,2,\dots,N_c$, $j = 1,2,\dots,N_o$, являются синтезируемыми параметрами обратной связи. Параметр $\tilde{\gamma}_i^j$ характеризует требуемое значение номинальной температуры в точке $x = \xi_j$, которое должно быть достигнуто за счет i-го точечного источника. Ясно, что это значение должно быть близко к заданному желаемому значению $U(\xi_j)$, $j = 1, 2, \ldots, N_o$. Параметры α^1_{ij}, α^2_{ij}, α^3_{ij}, β^1_{ij}, β^2_{ij}, β^3_{ij} по аналогии с задачами синтеза для объектов с сосредоточенными параметрами будем называть коэффициентами усиления.

Запишем зависимости (11), (12) в виде

$$q_i\left(t\right) = \sum_{j=1}^{N_o} \left(\alpha^1_{ij}|z_i\left(t\right) - \xi_j|^2 + \alpha^2_{ij}|z_i\left(t\right) - \xi_j| + \alpha^3_{ij}\right) u\left(\xi_j, t\right) -$$

$$- \sum_{j=1}^{N_o} \left(\alpha^1_{ij}|z_i\left(t\right) - \xi_j|^2 + \alpha^2_{ij}|z_i\left(t\right) - \xi_j| + \alpha^3_{ij}\right) \tilde{\gamma}^j_i, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, 2, \ldots, N_c,$$

$$\vartheta_i(t) = \sum_{j=1}^{N_o} \left(\beta^1_{ij}|z_i\left(t\right) - \xi_j|^2 + \beta^2_{ij}|z_i\left(t\right) - \xi_j| + \beta^3_{ij}\right) u\left(\xi_j, t\right) -$$

$$- \sum_{j=1}^{N_o} \left(\beta^1_{ij}|z_i\left(t\right) - \xi_j|^2 + \beta^2_{ij}|z_i\left(t\right) - \xi_j| + \beta^3_{ij}\right) \tilde{\gamma}^j_i, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, 2, \ldots, N_c.$$

Введя обозначения

$$\gamma^q_i = \sum_{j=1}^{N_o} \left(\alpha^1_{ij}|z_i\left(t\right) - \xi_j|^2 + \alpha^2_{ij}|z_i\left(t\right) - \xi_j| + \alpha^3_{ij}\right) \tilde{\gamma}^j_i,$$

$$\gamma^\vartheta_i = \sum_{j=1}^{N_o} \left(\beta^1_{ij}|z_i\left(t\right) - \xi_j|^2 + \beta^2_{ij}|z_i\left(t\right) - \xi_j| + \beta^3_{ij}\right) \tilde{\gamma}^j_i,$$

получим

$$q_i\left(t\right) = \sum_{j=1}^{N_o} \left(\alpha^1_{ij}|z_i\left(t\right) - \xi_j|^2 + \alpha^2_{ij}|z_i\left(t\right) - \xi_j| + \alpha^3_{ij}\right) u\left(\xi_j, t\right) - \gamma^q_i, \tag{13}$$

$$t \in [0, T], \quad i = 1, 2, \ldots, N_c,$$

$$\vartheta_i(t) = \sum_{j=1}^{N_o} \left(\beta^1_{ij}|z_i\left(t\right) - \xi_j|^2 + \beta^2_{ij}|z_i\left(t\right) - \xi_j| + \beta^3_{ij}\right) u\left(\xi_j, t\right) - \gamma^\vartheta_i, \tag{14}$$

$$t \in [0, T], \quad i = 1, 2, \ldots, N_c.$$

Объединим параметры $\alpha^1 = ((\alpha^1_{ij}))$, $\alpha^2 = ((\alpha^2_{ij}))$, $\alpha^3 = ((\alpha^3_{ij}))$, $\beta^1 = ((\beta^1_{ij}))$, $\beta^2 = ((\beta^2_{ij}))$, $\beta^3 = ((\beta^3_{ij}))$, $\gamma^q = (\gamma^q_i)$, $\gamma^\vartheta = (\gamma^\vartheta_i)$ в один $N = N_c(6N_o + 2)$-мерный синтезируемый вектор параметров обратной связи: $y = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \beta^1, \beta^2, \beta^3, \gamma^q, \gamma^\vartheta)$, $i = 1, 2, \ldots, N_c$, $j = 1, 2, \ldots, N_o$.

Целевой функционал в таком случае можно записать так:

$$J(y) = \int\limits_{\mathrm{P}} \int\limits_{\Theta} I(y; p, \theta) \rho_\Theta(\theta) \rho_{\mathrm{P}}(p) d\theta dp, \tag{15}$$

$$I(y;p,\theta)=\int\limits_0^l \mu(x)[u(x,T)-U(x)]^2dx+\varepsilon\,\|y-\hat{y}\|^2_{\mathrm{R}^N}\,. \tag{16}$$

Подставив зависимости (13), (14) в уравнения (1), (6), получим

$$u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)-\lambda_0[u(x,t)-\theta]+ \tag{17}$$

$$+\sum_{i=1}^{N_c}\delta\left(x-z_i\left(t\right)\right)\left(\sum_{j=1}^{N_o}\left(\alpha^1_{ij}|z_i\left(t\right)-\xi_j|^2+\alpha^2_{ij}|z_i\left(t\right)-\xi_j|+\alpha^3_{ij}\right)u\left(\xi_j,t\right)-\gamma^q_i\right),$$

$$x\in(0,l),\quad t\in(0,T],$$

$$\ddot{z}_i(t)=a^i\dot{z}_i(t)+b_iz_i(t)+ \tag{18}$$

$$+\sum_{j=1}^{N_o}\left(\beta^1_{ij}|z_i\left(t\right)-\xi_j|^2+\beta^2_{ij}|z_i\left(t\right)-\xi_j|+\beta^3_{ij}\right)u\left(\xi_j,t\right)-\gamma^\vartheta_i,\quad t\in(0,T].$$

Специфика уравнений (17), (18) заключается, во-первых, в том, что они являются точечно нагруженными по пространственной переменной. Во-вторых, уравнения (17), (18) по временной переменной должны решаться одновременно. Отметим, что линейно нагруженные уравнения исследовались в таких работах, как [10]– [12].

Из технологических соображений можно считать известными такие $\underline{u}$ и $\overline{u}$, для которых выполняются условия:

$$\underline{u}\le u(x,t)\le\overline{u},\quad x\in[0,l],\quad t\in[0,T]. \tag{19}$$

Тогда из (19) и ограничений (3), (8), учитывая линейность зависимостей (13), (14) относительно $u(\xi_j,t)$, получим ограничения на параметры обратной связи:

$$\begin{cases}\underline{q_i}\le\overline{u}\sum_{j=1}^{N_o}\left(\alpha^1_{ij}|z_i\left(t\right)-\xi_j|^2+\alpha^2_{ij}|z_i\left(t\right)-\xi_j|+\alpha^3_{ij}\right)-\gamma^q_i\le\overline{q_i}, & i=1,2,\ldots,N_c,\\ \underline{q_i}\le\underline{u}\sum_{j=1}^{N_o}\left(\alpha^1_{ij}|z_i\left(t\right)-\xi_j|^2+\alpha^2_{ij}|z_i\left(t\right)-\xi_j|+\alpha^3_{ij}\right)-\gamma^q_i\le\overline{q_i}, & i=1,2,\ldots,N_c,\\ \underline{\vartheta_i}\le\overline{u}\sum_{j=1}^{N_o}\left(\beta^1_{ij}|z_i\left(t\right)-\xi_j|^2+\beta^2_{ij}|z_i\left(t\right)-\xi_j|+\beta^3_{ij}\right)-\gamma^\vartheta_i\le\overline{\vartheta_i}, & i=1,2,\ldots,N_c,\\ \underline{\vartheta_i}\le\underline{u}\sum_{j=1}^{N_o}\left(\beta^1_{ij}|z_i\left(t\right)-\xi_j|^2+\beta^2_{ij}|z_i\left(t\right)-\xi_j|+\beta^3_{ij}\right)-\gamma^\vartheta_i\le\overline{\vartheta_i}, & i=1,2,\ldots,N_c.\end{cases} \tag{20}$$

Таким образом, исходная рассматриваемая задача управления движущимися точечными источниками (1)–(10) с обратной связью (13), (14) приведена к параметрической задаче оптимального управления (15), (16), (2), (4) [6].

Отметим следующие особенности полученной задачи параметрического оптимального управления.

Во-первых, изучаемый процесс описывается системой нагруженных дифференциальных уравнений с частными и обыкновенными производными.

Во-вторых, задача специфична из-за целевого функционала (9), (10), оценивающего поведение ни одной траектории, а пучка фазовых траекторий со значениями начальных условий и температуры внешней среды из заданных множеств.

В целом, полученную задачу можно отнести к классу конечномерных задач оптимизации относительно вектора $y \in \mathrm{R}^N$. В этой задаче для вычисления целевого функционала при допустимых значениях параметров обратной связи требуется решить начально-краевые задачи относительно дифференциальных уравнений с частными и обыкновенными производными.

3. Подход к определению параметров обратной связи. Для минимизации функционала (15), (16), предлагается использовать итерационную процедуру метода проекции градиента [6]:

$$y^{n+1} = \mathcal{P}_{(20)}\left[y^n - \alpha_n \mathbf{grad} J\left(y^n\right)\right], \tag{21}$$

$$\alpha_n = \arg\min_{\alpha \geq 0} J\left(y^n - \alpha \mathbf{grad} J\left(y^n\right)\right), \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Здесь: α_n – шаг одномерной минимизации, $y^0 \in \mathrm{R}^N$ – произвольная начальная точка из множества параметров обратной связи, $\mathcal{P}_{(20)}[\cdot]$ – оператор проектирования на множество, определяемое ограничениями (20).

С целью реализации процедуры (21) получим аналитические формулы градиента функционала.

Теорема. *При наложенных выше условиях на функции и параметры, участвующие в задаче (15)–(18), (2), (5), (7), градиент функционала (15), (16) по параметрам обратной связи дифференцируем, а его компоненты определяются формулами:*

$$\frac{\partial J(y)}{\partial \alpha_{ij}^1} = \int\limits_{\mathrm{P}} \int\limits_{\Theta} \left\{ -\int\limits_0^T \psi(z_i\left(t\right), t) |z_i\left(t\right) - \xi_j|^2 u\left(\xi_j, t\right) dt + 2\varepsilon\left(\alpha_{ij}^1 - \hat{\alpha}_{ij}^1\right) \right\} \rho_\Theta(\theta) \rho_{\mathrm{P}}(p) d\theta dp, \tag{22}$$

$$\frac{\partial J(y)}{\partial \alpha_{ij}^2} = \int\limits_{\mathrm{P}} \int\limits_{\Theta} \left\{ -\int\limits_0^T \psi(z_i\left(t\right), t) |z_i\left(t\right) - \xi_j| u\left(\xi_j, t\right) dt + 2\varepsilon\left(\alpha_{ij}^2 - \hat{\alpha}_{ij}^2\right) \right\} \rho_\Theta(\theta) \rho_{\mathrm{P}}(p) d\theta dp, \tag{23}$$

$$\frac{\partial J(y)}{\partial \alpha_{ij}^3} = \int\limits_{\mathrm{P}} \int\limits_{\Theta} \left\{ -\int\limits_0^T \psi(z_i\left(t\right), t) u\left(\xi_j, t\right) dt + 2\varepsilon\left(\alpha_{ij}^3 - \hat{\alpha}_{ij}^3\right) \right\} \rho_\Theta(\theta) \rho_{\mathrm{P}}(p) d\theta dp, \tag{24}$$

$$\frac{\partial J(y)}{\partial \beta_{ij}^1} = \int\limits_{\mathrm{P}} \int\limits_{\Theta} \left\{ -\int\limits_0^T \varphi_i(t) |z_i\left(t\right) - \xi_j|^2 u\left(\xi_j, t\right) dt + 2\varepsilon\left(\beta_{ij}^1 - \hat{\beta}_{ij}^1\right) \right\} \rho_\Theta(\theta) \rho_{\mathrm{P}}(p) d\theta dp, \tag{25}$$

$$\frac{\partial J(y)}{\partial \beta_{ij}^2} = \int\limits_{\mathrm{P}} \int\limits_{\Theta} \left\{ -\int\limits_0^T \varphi_i(t) |z_i\left(t\right) - \xi_j| u\left(\xi_j, t\right) dt + 2\varepsilon\left(\beta_{ij}^2 - \hat{\beta}_{ij}^2\right) \right\} \rho_\Theta(\theta) \rho_{\mathrm{P}}(p) d\theta dp, \tag{26}$$

$$\frac{\partial J(y)}{\partial \beta_{ij}^3} = \int\limits_{\mathrm{P}} \int\limits_{\Theta} \left\{ -\int\limits_0^T \varphi_i(t) u\left(\xi_j, t\right) dt + 2\varepsilon\left(\beta_{ij}^3 - \hat{\beta}_{ij}^3\right) \right\} \rho_\Theta(\theta) \rho_{\mathrm{P}}(p) d\theta dp, \tag{27}$$

$$\frac{\partial J(y)}{\partial \xi_j} = \int\limits_{\mathrm{P}}\int\limits_{\Theta}\Bigg\{-\sum_{i=1}^{N_c}\int\limits_0^T \left(\alpha_{ij}^1|z_i(t)-\xi_j|^2+\alpha_{ij}^2|z_i(t)-\xi_j|+\alpha_{ij}^3\right)\psi\left(z_i(t),t\right)u_x\left(\xi_j,t\right)dt-$$

$$-\sum_{i=1}^{N_c}\int\limits_0^T \left(\beta_{ij}^1|z_i(t)-\xi_j|^2+\beta_{ij}^2|z_i(t)-\xi_j|+\beta_{ij}^3\right)\varphi_i(t)\,u_x\left(\xi_j,t\right)dt+ \tag{28}$$

$$+\sum_{i=1}^{N_c}\int\limits_0^T \left(2\alpha_{ij}^1(z_i(t)-\xi_j)+\alpha_{ij}^2 sgn(z_i(t)-\xi_j)\right)\psi\left(z_i(t),t\right)u\left(\xi_j,t\right)dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{N_c}\int\limits_0^T \left(2\beta_{ij}^1(z_i(t)-\xi_j)+\beta_{ij}^2 sgn(z_i(t)-\xi_j)\right)\varphi_i(t)u\left(\xi_j,t\right)dt+2\varepsilon\left(\xi_j-\hat{\xi}_j\right)\Bigg\}\rho_\Theta(\theta)\rho_{\mathrm{P}}(p)d\theta dp,$$

$$\frac{\partial J(y)}{\partial \gamma_i^q} = \int\limits_{\mathrm{P}}\int\limits_{\Theta}\left\{\int\limits_0^T \psi(z_i(t),t)dt+2\varepsilon\left(\gamma_i^q-\hat{\gamma}_i^q\right)\right\}\rho_\Theta(\theta)\rho_{\mathrm{P}}(p)d\theta dp, \tag{29}$$

$$\frac{\partial J(y)}{\partial \gamma_i^\vartheta} = \int\limits_{\mathrm{P}}\int\limits_{\Theta}\left\{\int\limits_0^T \varphi_i(t)dt+2\varepsilon\left(\gamma_i^\vartheta-\hat{\gamma}_i^\vartheta\right)\right\}\rho_\Theta(\theta)\rho_{\mathrm{P}}(p)d\theta dp, \tag{30}$$

$i=1,2,\ldots,N_c$, $j=1,2,\ldots,N_o$. *Функции* $\psi(x,t)$ *и* $\varphi_i(t)$, $i=1,2,\ldots,N_c$, *являются решениями следующих задач:*

$$\psi_t(x,t) = -a^2\psi_{xx}(x,t)+\lambda_0\psi(x,t)-\sum_{j=1}^{N_o}\delta\left(x-\xi_j\right)\times \tag{31}$$

$$\times\Bigg\{\sum_{i=1}^{N_c}\left(\alpha_{ij}^1|z_i(t)-\xi_j|^2+\alpha_{ij}^2|z_i(t)-\xi_j|+\alpha_{ij}^3\right)\psi\left(z_i(t),t\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N_c}\left(\beta_{ij}^1|z_i(t)-\xi_j|^2+\beta_{ij}^2|z_i(t)-\xi_j|+\beta_{ij}^3\right)\varphi_i(t)\Bigg\},\quad x\in\Omega,\quad t\in[0,T),$$

$$\psi(x,T) = -2\mu(x)\left(u(x,T)-U(x)\right),\quad x\in\Omega, \tag{32}$$

$$\psi_x(0,t)=\lambda_1\psi(0,t),\quad \psi_x(l,t)=-\lambda_2\psi(l,t),\quad t\in[0,T), \tag{33}$$

$$\ddot{\varphi}_i(t) = -a_i\dot{\varphi}_i(t)+b_i\varphi_i(t)+ \tag{34}$$

$$+\psi_x\left(z_i(t),t\right)\left\{\sum_{j=1}^{N_o}\left(\alpha_{ij}^1|z_i(t)-\xi_j|^2+\alpha_{ij}^2|z_i(t)-\xi_j|+\alpha_{ij}^3\right)u\left(\xi_j,t\right)-\gamma_i^q\right\}+$$

$$+\psi\left(z_i(t),t\right)\left\{\sum_{j=1}^{N_o}\left(2\alpha_{ij}^1(z_i(t)-\xi_j)+\alpha_{ij}^2 sgn z_i(t)-\xi_j\right)u\left(\xi_j,t\right)\right\}+$$

$$+\varphi_i(t)\left\{\sum_{j=1}^{N_o}\left(2\beta_{ij}^1(z_i\left(t\right)-\xi_j)+\beta_{ij}^2 sgn z_i\left(t\right)-\xi_j\right)u\left(\xi_j,t\right)\right\},\quad t\in[0,T),$$

$$\dot{\varphi}_i(T)=-a_i\varphi_i(t),\quad \varphi_i(t)=0,\quad i=1,2,\ldots,N_c. \tag{35}$$

Доказательство. Для доказательства дифференцируемости функционала $J(y)$ по у используем метод приращения.

При наложенных условиях на данные, участвующие в задаче, имеет место формула:

$$\mathbf{grad}J(y)=\mathbf{grad}\int\limits_{\mathrm{P}}\int\limits_{\Theta}I(y;p,\theta)\rho_\Theta(\theta)\rho_{\mathrm{P}}(p)d\theta dp= \tag{36}$$

$$=\int\limits_{\mathrm{P}}\int\limits_{\Theta}\mathbf{grad}I(y;p,\theta)\rho_\Theta(\theta)\rho_{\mathrm{P}}(p)d\theta dp.$$

Поэтому определим формулы для $\mathbf{grad}I(y;p,\theta)$ для произвольных допустимых значений $p\in\mathrm{P}$ и $\theta\in\Theta$.

Обозначим третье слагаемое правой части (17).

$$V(y)=\sum_{i=1}^{N_c}\delta(x-z_i\left(t\right))\left(\sum_{j=1}^{N_o}\left(\alpha_{ij}^1|z_i\left(t\right)-\xi_j|^2+\alpha_{ij}^2|z_i\left(t\right)-\xi_j|+\alpha_{ij}^3\right)u\left(\xi_j,t\right)-\gamma_i^q\right).$$

Обозначим через $u(x,t)=u(x,t;y,p,\theta)$, $z(t)=z(t;y,p,\theta)$ решения начально-краевой задачи (17), (2), (5) и задачи Коши (18), (7) при заданных значениях параметров p и θ. Предположим, что параметры y получили приращение Δy:$\tilde{y}=y+\Delta y$, тогда получат приращения и решения задач (17), (2), (5) и (18), (7):

$$\tilde{u}\left(x,t;\tilde{y},p,\theta\right)=u(x,t;y,p,\theta)+\Delta u(x,t;y,p,\theta),$$

$$\tilde{z}\left(t;\tilde{y},p,\theta\right)=z(t;y,p,\theta)+\Delta z(t;y,p,\theta).$$

Ясно, что $\Delta u(x,t;y,p,\theta)$ и $\Delta z(t;y,p,\theta)$ удовлетворяют условиям начально-краевых задач:

$$\Delta u_t(x,t)=a^2\Delta u_{xx}(x,t)-\lambda_0\Delta u(x,t)+\Delta V(y),\quad x\in(0,l),\quad t\in(0,T], \tag{37}$$

$$\Delta u(x,0)=0,\quad x\in[0,l], \tag{38}$$

$$\Delta u_x(0,t)=\lambda_1\Delta u(0,t),\quad t\in(0,T], \tag{39}$$

$$\Delta u_x(l,t)=-\lambda_2\Delta u(l,t),\quad t\in(0,T].$$

$$\Delta\ddot{z}_i(t)=a_i\Delta\dot{z}_i(t)+b_i\Delta z_i(t)+\Delta\vartheta_i(t),\quad t\in(0,T], \tag{40}$$

$$\Delta z_i(0)=0,\quad \Delta\dot{z}_i(0)=0,\quad i=1,2,\ldots,N_c. \tag{41}$$

Получит приращение и функционал

$$\Delta I(y)=I(y+\Delta y;p,\theta)-I(y;p,\theta)=$$

$$= 2\int\limits_0^l \mu(x)\left(u(x,T)-U(x)\right)\Delta u(x,T)dx + 2\varepsilon\left\langle y-\hat{y},\Delta y\right\rangle. \qquad (42)$$

Перенесем правые части дифференциальных уравнений (37) и (40) влево, умножим обе части полученных равенств на пока произвольные функции соответственно $\psi(x,t)$ и $\varphi_i(t)$, $i=1,2,\ldots,N_c$, проинтегрируем по $t\in(0,T)$ и $x\in(0,l)$ и складывая с (42):

$$\Delta I(y) = 2\int\limits_0^l \mu(x)\left(u(x,T)-U(x)\right)\Delta u(x,T)dx + 2\varepsilon_1\left\langle y-\hat{y},\Delta y\right\rangle +$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_0^l \psi(x,t)\big(\Delta u_t(x,t)-a^2\Delta u_{xx}(x,t)+\lambda_0\Delta u(x,t)-\Delta V(y)\big)dxdt+$$

$$+\sum_{i=1}^{N_c}\int\limits_0^T \varphi_i(t)\left(\Delta\ddot{z}_i(t)-a_i\Delta\dot{z}_i(t)-b_i\Delta z_i\left(t\right)-\Delta\vartheta_i(t)\right)dt.$$

Проведя соответствующие преобразования и группировку, учитывая (38), (39), (41), будем иметь

$$\Delta I(y) = 2\int\limits_0^l \mu(x)\left(u(x,T)-U(x)\right)\Delta u(x,T)dx + \int\limits_0^l \psi(x,T)\Delta u(x,T)dx+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_0^l \big(-\psi_t(x,t)-a^2\psi_{xx}(x,t)+\lambda_0\psi(x,t)\big)\Delta u(x,t)dxdt-$$

$$-a^2\int\limits_0^T\left(\psi_x(l,t)+\lambda_2\psi(l,t)\right)\Delta u(l,t)dt - a^2\int\limits_0^T\left(\psi_x(0,t)-\lambda_1\psi(0,t)\right)\Delta u(0,t)dt-$$

$$-\sum_{i=1}^{N_c}\sum_{j=1}^{N_o}\int\limits_0^T\int\limits_0^l\left\{\left(\alpha_{ij}^1|z_i\left(t\right)-\xi_j|^2+\alpha_{ij}^2|z_i\left(t\right)-\xi_j|+\alpha_{ij}^3\right)\psi\left(z_i\left(t\right),t\right)\right\}\delta\left(x-\xi_j\right)\Delta u(x,t)dxdt-$$

$$-\sum_{i=1}^{N_c}\sum_{j=1}^{N_o}\int\limits_0^T\int\limits_0^l\left\{\left(\beta_{ij}^1|z_i\left(t\right)-\xi_j|^2+\beta_{ij}^2|z_i\left(t\right)-\xi_j|+\beta_{ij}^3\right)\varphi_i(t)\right\}\delta\left(x-\xi_j\right)\Delta u(x,t)dxdt+$$

$$+\sum_{i=1}^{N_c}\sum_{j=1}^{N_o}\Delta\alpha_{ij}^1\left\{-\int\limits_0^T|z_i\left(t\right)-\xi_j|^2\psi\left(z_i\left(t\right),t\right)u\left(\xi_j,t\right)dt+2\varepsilon\left(\alpha_{ij}^1-\hat{\alpha}_{ij}^1\right)\right\}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N_c}\sum_{j=1}^{N_o}\Delta\alpha_{ij}^2\left\{-\int\limits_0^T|z_i\left(t\right)-\xi_j|\psi\left(z_i\left(t\right),t\right)u\left(\xi_j,t\right)dt+2\varepsilon\left(\alpha_{ij}^2-\hat{\alpha}_{ij}^2\right)\right\}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N_c}\sum_{j=1}^{N_o}\Delta\alpha_{ij}^3\left\{-\int_0^T\psi\left(z_i\left(t\right),t\right)u\left(\xi_j,t\right)dt+2\varepsilon\left(\alpha_{ij}^3-\hat{\alpha}_{ij}^3\right)\right\}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N_c}\sum_{j=1}^{N_o}\Delta\beta_{ij}^1\left\{-\int_0^T|z_i\left(t\right)-\xi_j|^2\varphi_i(t)u\left(\xi_j,t\right)dt+2\varepsilon\left(\beta_{ij}^1-\hat{\beta}_{ij}^1\right)\right\}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N_c}\sum_{j=1}^{N_o}\Delta\beta_{ij}^2\left\{-\int_0^T|z_i\left(t\right)-\xi_j|\varphi_i(t)u\left(\xi_j,t\right)dt+2\varepsilon\left(\beta_{ij}^2-\hat{\beta}_{ij}^2\right)\right\}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N_c}\sum_{j=1}^{N_o}\Delta\beta_{ij}^3\left\{-\int_0^T\varphi_i(t)u\left(\xi_j,t\right)dt+2\varepsilon\left(\beta_{ij}^3-\hat{\beta}_{ij}^3\right)\right\}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N_c}\Delta\gamma_i^q\left\{\int_0^T\psi\left(z_i\left(t\right),t\right)dt+2\varepsilon\left(\gamma_i^q-\hat{\gamma}_i^q\right)\right\}+\sum_{i=1}^{N_c}\Delta\gamma_i^\vartheta\left\{\int_0^T\varphi_i(t)dt+2\varepsilon\left(\gamma_i^\vartheta-\hat{\gamma}_i^\vartheta\right)\right\}+$$

$$+\sum_{j=1}^{N_o}\Delta\xi_j\Bigg\{-\sum_{i=1}^{N_c}\int_0^T\left(\alpha_{ij}^1|z_i\left(t\right)-\xi_j|^2+\alpha_{ij}^2|z_i\left(t\right)-\xi_j|+\alpha_{ij}^3\right)\psi\left(z_i\left(t\right),t\right)u_x\left(\xi_j,t\right)dt-$$

$$-\sum_{i=1}^{N_c}\int_0^T\left(\beta_{ij}^1|z_i\left(t\right)-\xi_j|^2+\beta_{ij}^2|z_i\left(t\right)-\xi_j|+\beta_{ij}^3\right)\varphi_i(t)u_x\left(\xi_j,t\right)dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{N_c}\int_0^T\left(2\alpha_{ij}^1(z_i\left(t\right)-\xi_j)+\alpha_{ij}^2\mathrm{sgn}(z_i\left(t\right)-\xi_j)\right)\psi\left(z_i\left(t\right),t\right)u\left(\xi_j,t\right)dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{N_c}\int_0^T\left(2\beta_{ij}^1(z_i\left(t\right)-\xi_j)+\beta_{ij}^2\mathrm{sgn}(z_i\left(t\right)-\xi_j)\right)\varphi_i(t)u\left(\xi_j,t\right)dt+2\varepsilon\left(\xi_j-\hat{\xi}_j\right)\Bigg\}-$$

$$-\sum_{i=1}^{N_c}\left(\dot{\varphi}_i(T)+\varphi(T)a_i\right)\Delta z_i(T)+\sum_{i=1}^{N_c}\varphi_i(T)\Delta\dot{z}_i(T)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N_c}\int_0^T\Bigg\{\ddot{\varphi}_i(t)+a_i\dot{\varphi}_i(t)-b_i\varphi_i(t)dt-$$

$$-\psi_x\left(z_i\left(t\right),t\right)\left\{\sum_{j=1}^{N_o}\left(\alpha_{ij}^1|z_i\left(t\right)-\xi_j|^2+\alpha_{ij}^2|z_i\left(t\right)-\xi_j|+\alpha_{ij}^3\right)u\left(\xi_j,t\right)-\gamma_i^q\right\}-$$

$$-\psi\left(z_i\left(t\right),t\right)\left\{\sum_{j=1}^{N_o}\left(2\alpha_{ij}^1\left(z_i\left(t\right)-\xi_j\right)+\alpha_{ij}^2\mathrm{sgn}(z_i\left(t\right)-\xi_j)\right)u\left(\xi_j,t\right)\right\}-$$

$$-\varphi_i(t)\Big\{\sum_{j=1}^{N_o}\left(2\beta_{ij}^1\left(z_i\left(t\right)-\xi_j\right)+\beta_{ij}^2\mathrm{sgn}(z_i\left(t\right)-\xi_j)\right)u\left(\xi_j,t\right)\Big\}\Bigg\}\Delta z_i\left(t\right).$$

Учитывая, что функции $\psi(x,t)$ и $\varphi_i(t)$, $i=1,2,\ldots,N_c$, произвольные, потребуем выполнения условий (31)–(35).

Тогда ясно, что компоненты градиента функционала $I(y;p,\theta)$ определяются формулами:

$$\frac{\partial I(w;p,\theta)}{\partial\alpha_{ij}^1}=-\int\limits_0^T\psi(z_i\left(t\right),t)|z_i\left(t\right)-\xi_j|^2u\left(\xi_j,t\right)dt+2\varepsilon\left(\alpha_{ij}^1-\hat{\alpha}_{ij}^1\right), \tag{43}$$

$$\frac{\partial I(w;p,\theta)}{\partial\alpha_{ij}^2}=-\int\limits_0^T\psi(z_i\left(t\right),t)|z_i\left(t\right)-\xi_j|u\left(\xi_j,t\right)dt+2\varepsilon\left(\alpha_{ij}^2-\hat{\alpha}_{ij}^2\right), \tag{44}$$

$$\frac{\partial I(w;p,\theta)}{\partial\alpha_{ij}^3}=-\int\limits_0^T\psi(z_i\left(t\right),t)u\left(\xi_j,t\right)dt+2\varepsilon\left(\alpha_{ij}^3-\hat{\alpha}_{ij}^3\right), \tag{45}$$

$$\frac{\partial I(w;p,\theta)}{\partial\beta_{ij}^1}=-\int\limits_0^T\varphi_i(t)|z_i\left(t\right)-\xi_j|^2u\left(\xi_j,t\right)dt+2\varepsilon\left(\beta_{ij}^1-\hat{\beta}_{ij}^1\right), \tag{46}$$

$$\frac{\partial I(w;p,\theta)}{\partial\beta_{ij}^2}=-\int\limits_0^T\varphi_i(t)|z_i\left(t\right)-\xi_j|u\left(\xi_j,t\right)dt+2\varepsilon\left(\beta_{ij}^2-\hat{\beta}_{ij}^2\right), \tag{47}$$

$$\frac{\partial I(w;p,\theta)}{\partial\beta_{ij}^3}=-\int\limits_0^T\varphi_i(t)u\left(\xi_j,t\right)dt+2\varepsilon\left(\beta_{ij}^3-\hat{\beta}_{ij}^3\right), \tag{48}$$

$$\frac{\partial I(w;p,\theta)}{\partial\xi_j}=-\sum_{i=1}^{N_c}\int\limits_0^T\left(\alpha_{ij}^1|z_i\left(t\right)-\xi_j|^2+\alpha_{ij}^2|z_i\left(t\right)-\xi_j|+\alpha_{ij}^3\right)\psi\left(z_i\left(t\right),t\right)u_x\left(\xi_j,t\right)dt- \tag{49}$$

$$-\sum_{i=1}^{N_c}\int\limits_0^T\left(\beta_{ij}^1|z_i\left(t\right)-\xi_j|^2+\beta_{ij}^2|z_i\left(t\right)-\xi_j|+\beta_{ij}^3\right)\varphi_i\left(t\right)u_x\left(\xi_j,t\right)dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{N_c}\int\limits_0^T\left(2\alpha_{ij}^1(z_i\left(t\right)-\xi_j)+\alpha_{ij}^2\mathrm{sgn}(z_i\left(t\right)-\xi_j)\right)\psi\left(z_i\left(t\right),t\right)u\left(\xi_j,t\right)dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{N_c}\int\limits_0^T\left(2\beta_{ij}^1(z_i\left(t\right)-\xi_j)+\beta_{ij}^2\mathrm{sgn}(z_i\left(t\right)-\xi_j)\right)\varphi_i(t)u\left(\xi_j,t\right)dt+2\varepsilon\left(\xi_j-\hat{\xi}_j\right),$$

$$\frac{\partial I(w;p,\theta)}{\partial\gamma_i^q}=\int\limits_0^T\psi(z_i\left(t\right),t)dt+2\varepsilon\left(\gamma_i^q-\hat{\gamma}_i^q\right), \tag{50}$$

$$\frac{\partial I(w;p,\theta)}{\partial \gamma_i^{\vartheta}} = \int_0^T \varphi_i(t)dt + 2\varepsilon\left(\gamma_i^{\vartheta} - \hat{\gamma}_i^{\vartheta}\right). \tag{51}$$

Учитывая условия (36) из (43)–(51), получим искомые формулы (22)–(30).

4. Заключение. Предложен подход к управлению с обратной связью движением и мощностью сосредоточенных источников в системах с распределенными параметрами. Рассмотрена задача управления движущимися источниками тепла, используемыми для нагрева стержня. Мощности и управляющие воздействия на движение точечных источников определяются в виде предложенных зависимостей от результатов проводимых замеров. Показана дифференцируемость функционала по параметрам обратной связи, получены формулы для градиента функционала по синтезируемым параметрам. Формулы позволяют для решения задачи синтеза управления сосредоточенными источниками использовать эффективные численные методы оптимизации первого порядка и имеющиеся стандартные пакеты прикладных программ.

Отметим, что предлагаемый подход к синтезу приводит к задаче параметрического оптимального управления процессом, описываемым нагруженными дифференциальными уравнениями с обыкновенными и частными производными.

Предлагаемый подход к управлению сосредоточенными источниками с обратной связью может быть использован в системах автоматического управления и регулирования сосредоточенными источниками для многих других технологических процессов и технических объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ray W.H. Advanced Process Control. McGraw-Hill Book Company, 1980. 376 p.
2. Егоров А.И. Основы теории управления. М.: Физматлит, 2004. 504 с.
3. Бутковский А.Г., Пустыльников Л.М. Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1980. 384 с.
4. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977. 420 с.
5. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019. 504 с.
6. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
7. Кулиев С. З. Синтез зональных управлений для одной задачи нагрева с запаздыванием в неразделенных краевых условиях // Кибернетика и системный анализ. 2018. Т. 54, № 1. С. 124-136.
8. Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М. Об одном подходе к синтезу управления процессами с распределенными параметрами // АиТ. 2012. № 9. С. 3-19.
9. Aida-zade K.R., Hashimov V.A., Bagirov A.H. On a problem of synthesis of control of power of the moving sources on heating of a rod // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, ANAS. 2021, vol. 47, no. 1, pp. 183-196.
10. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.

11. Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. Численный метод решения нагруженных нелокальных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. 2014. Т. 54, № 7. С. 1096-1109.
12. Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. Конечноразностные методы решения нагруженных параболических уравнений // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. 2016. Т. 58, № 1. С. 99-112.

ABSTRACT

The article proposes an approach to solving the problem of synthesis of motion and power control of lumped sources. For concreteness, the problem of linear feedback control of moving heat sources during heating of the rod is considered. The powers and motion of point sources, participating in the right-hand side of the differential equation of parabolic type, are determined depending on the measured values of the process state at the points of measurement. As a result, the right-hand side of the differential equation linearly depends on the values of the process state at the given points of the bar. Formulas for the components of the gradient of the functional with respect to the parameters of linear feedback are obtained, which make it possible to use first-order optimization methods for the numerical solution of synthesis problems.

Keywords: loaded equation, rod heating, feedback control, moving source, temperature measurement point, feedback parameters.

Institute of Control Systems, Azerbaijan National Academy of Science, Baku;
E-mail: vugarhashimov@gmail.com

АННОТАЦИЯ

В статье предложен подход к решению задачи синтеза управления движением и мощностью сосредоточенных источников. Для конкретности рассмотрена задача управления с линейной обратной связью движущимися источниками тепла при нагреве стержня. Мощности и движение точечных источников, участвующие в правой части дифференциального уравнения параболического типа, определяются в зависимости от замеренных значений состояния процесса в точках замера. В результате правая часть дифференциального уравнения линейно зависит от значений состояния процесса в заданных точках стержня. Получены формулы компонентов градиента функционала по параметрам линейной обратной связи, позволяющие для численного решения задач синтеза использовать методы оптимизации первого порядка.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, нагрев стержня, управление с обратной связью, движущийся источник, точка замера температуры, параметры обратной связи.

Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку;
E-mail: vugarhashimov@gmail.com