УДК 517.95
DOI 10.47928/1726-9946-2021-21-3-6-15

Об одной краевой задаче в полуполосе для параболического уравнения четвертого порядка с оператором Римана-Лиувилля по временной переменной

Карашева Л.Л.

Представлено академиком АМАН А.В. Псху

Рассмотрим в области $D = \{(x,t) : 0 < x < \infty, 0 < t < T\}$ уравнение

$$Lu(x,t) = D^{\alpha}_{0t}u(x,t) + \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = f(x,t), \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{N}$, D^{α}_{0t} – оператор дробного (в смысле Римана-Лиувилля) интегродифференцирования порядка α, $0 < \alpha \le 2$, определяемый соотношением [1, с. 9]

$$D^{\alpha}_{0x}\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int\limits_0^x \frac{\varphi(t)dt}{|x-t|^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ \varphi(x), & \alpha = 0, \\ \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}} D^{\alpha-[\alpha]-1}_{0x}\varphi(t), & \alpha > 0, \end{cases}$$

где $[\alpha]$ – целая часть числа $\alpha \in \mathbb{R}$, которая удовлетворяет неравенству $[\alpha] \le \alpha \le [\alpha] + 1$.

Уравнение (1) с производной второго порядка по переменной x называется диффузионно-волновым уравнением. Диффузионно-волновое уравнение широко исследовано. В частности, в работе [2] решена задача Коши для уравнения диффузии дробного порядка с регуляризованной дробной производной. В работе [3] построено фундаментальное решение, дано решение задачи Коши и доказана теорема единственности в классе функций, удовлетворяющих аналогу условия А.Н. Тихонова, для диффузионно-волнового уравнения. В работе [4] с помощью интегральных преобразований найдено решение диффузионно-волнового уравнения четвертого порядка с регуляризованной дробной производной по времени. В работе [5] найдено решение задачи Коши для дробного диффузионно-волнового уравнения. Наиболее полную библиографию можно найти в работах [3], [6], [7], [8].

В полубесконечной области в работе [9] исследована краевая задача для однородного уравнения второго порядка с дробной производной. В работе [10] для уравнения диффузии дробного порядка с постоянными коэффициентами при младших членах решена задача в полуполосе. В работе [11] построено фундаментальное решение для параболического уравнения порядка $2n$, исследованы его свойства и доказаны теоремы существования и единственности решения задачи Коши. В [12] исследована задача в полуполосе для уравнения (1).

В данной работе для уравнения (1) построено представление решения в полуполосе с заданными нечетными производными по переменной x и доказана единственность решения в классе функций быстрого роста.

Постановка задачи. *Регулярным решением* уравнения (1) в области D назовем функцию $u = u(x,t)$ имеющую непрерывные производные по переменной x до четвертого порядка такую, что $t^{1-\nu}u(x,t) \in C(\overline{D})$, $D_{0t}^{\alpha-1}u \in C^1(D) \cap C(\overline{D} \cup I)$, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \in C(D \cup J)$, $I = \{(x,t) : t = 0, x > 0\}$, $J = \{(x,t) : x = 0, 0 < t \leq T\}$, удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(x,t) \in D$.

Найти регулярное решение уравнения (1) в области D, удовлетворяющее начальному условию

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t) = \tau(x), \qquad x > 0 \tag{2}$$

и краевым условиям

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \varphi_0(t), \left.\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}\right|_{x=0} = \varphi_1(t), \qquad 0 < t \leq T, \tag{3}$$

где $\tau(x)$, $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$ – заданные функции.

В силу линейности задачи (1)-(3), решение можно представить в виде

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t), \tag{4}$$

где $u_1(x,t)$ – решение задачи Коши в области $\Omega = \{(x,t) : -\infty < x < \infty, 0 < t < T\}$

$$Lu_1(x,t) = D_{0t}^{\alpha}u(x,t) + \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = \widetilde{f}(x,t), \tag{5}$$

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}u_1(x,t) = \widetilde{\tau}(x), \tag{6}$$

функции $\widetilde{f}(x,t)$ и $\widetilde{\tau}(x)$ можно определить так, что $\widetilde{f}(x,t) = f(x,t)$, $\widetilde{\tau}(x) = \tau(x)$ при $x > 0$ и продолжаем при $x < 0$ так, чтобы выполнялись условия существования решения задачи Коши [11, Теорема 1], в частности

$$\lim_{|x|\to\infty} \widetilde{\tau}(x) \exp\left(-k|x|^{\frac{4}{4-\alpha}}\right) = 0,$$

$$\lim_{|x|\to\infty} t^{1-\alpha}\widetilde{f}(x,t) \exp\left(-k|x|^{\frac{4}{4-\alpha}}\right) = 0.$$

Определив функцию $u_1(x,t)$ [11], находим, что функция $u_2(x,t)$ является решением однородного уравнения (1), удовлетворяющим условиям

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}u_2(x,t) = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \varphi_0(t) - \left. u_1(x,t)\right|_{x=0},$$

$$\left.\frac{\partial^3 u_2(x,t)}{\partial x^3}\right|_{x=0} = \varphi_1(t) - \left.\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0}.$$

Поэтому далее будем рассматривать следующую задачу: найти регулярное решение уравнения

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t)+\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}=0, \tag{7}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t)=0, \qquad x>0 \tag{8}$$

и краевым условиям

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=\varphi_0(t), \qquad \left.\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}\right|_{x=0}=\varphi_1(t), \qquad 0<t\le T. \tag{9}$$

Вспомогательные утверждения. Рассмотрим функцию

$$\Gamma(x,t)=\frac{t^{\frac{3\alpha}{4}-1}}{4}\Theta_1\left(-|x|t^{-\frac{\alpha}{4}};-\frac{\alpha}{4},\frac{3\alpha}{4}\right), \tag{10}$$

где

$$\Theta_m(z;\beta,\mu)=e^{-im\frac{\pi}{4}}\phi\left(\beta,\mu;ze^{-i\frac{\pi}{4}}\right)+e^{im\frac{\pi}{4}}\phi\left(\beta,\mu;ze^{i\frac{\pi}{4}}\right), \quad \beta>-1, \mu\in\mathbb{C}, m\in\mathbb{N},$$

$\phi(\beta,\mu;z)=\sum\limits_{p=0}^{\infty}\frac{z^p}{p!\Gamma(\beta p+\mu)}$ - функция Райта [13]. Функция $\Gamma(x,t)$ является фундаментальным решением уравнения (1), для нее справедливы следующие выражения [11]:

$$\frac{d^q}{dz^q}\Theta_m(z;\beta,\mu)=\Theta_{m+q}(z;\beta,\mu+q\beta) \quad (q\in\mathbb{N},\ z\in\mathbb{C})\,; \tag{11}$$

$$\frac{d^4}{dz^4}\Theta_m(z;\beta,\mu)=-\Theta_m(z;\beta,\mu+4\beta); \tag{12}$$

$$D_{0y}^{\gamma}y^{\mu-1}\Theta_m\left(zy^{\beta};\beta,\mu\right)=y^{\mu-\gamma-1}\Theta_m\left(zy^{\beta};\beta,\mu-\gamma\right), \tag{13}$$

при $\beta\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$, $\left(1-\frac{1+2\beta}{4}\right)\pi<|\arg z|$, $-\pi<\arg z\le\pi$, $\mu\in\mathbb{R}$, $\gamma\in\mathbb{R}$;

$$\left|\frac{\partial^q}{\partial x^q}D_{0t}^{\gamma}\Gamma(x,t)\right|\le C|x|^{-\theta}t^{\alpha\left(1-\frac{1+q-\theta}{4}\right)-\gamma-1}\exp\left(-\sigma|x|^{\frac{4}{4-\alpha}}t^{-\frac{\alpha}{4-\alpha}}\right), \tag{14}$$

где $\sigma<\sigma_0=\left(1-\frac{\alpha}{4}\right)\left(\frac{\alpha}{4}\right)^{\frac{\alpha}{4-\alpha}}\cos\frac{1}{4-\alpha}\pi$, $0<\alpha<2$, $\gamma\in\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\theta\ge 0$, C – некоторая положительная постоянная, не зависящая от x и t;

$$\frac{\partial^q}{\partial x^q}D_{0t}^{\gamma}\Gamma(0+,t)-\frac{\partial^q}{\partial x^q}D_{0t}^{\gamma}\Gamma(0-,t)=\begin{cases}0, & \text{при } q=\overline{0,2},\\ \frac{t^{-\gamma-1}}{\Gamma(-\gamma)}, & \text{при } q=3,\end{cases} \tag{15}$$

где $q\in\mathbb{N}$, $\gamma\in\mathbb{R}$.

Замечание 1. Если $\gamma\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ и q - нечетное натуральное число, тогда для функции $\Gamma(x,t)$ справедлива оценка (14) при $\theta>-1$.

Действительно, известна оценка [11, лемма 4]

$$|\Theta_{n,m}(z;\beta,\mu)| \le C\exp\left(-\sigma|z|^{\frac{1}{1+\beta}}\right), \tag{16}$$

$$\text{при } \beta \in \left(-\frac{1}{n},0\right), \left(1-\frac{1+n\beta}{2n}\right)\pi < |\arg z|, -\pi < \arg z \le \pi.$$

Кроме того если q нечетно, то с помощью несложных вычислений можно показать, что

$$\lim_{|z|\to 0} z\frac{\partial^q}{\partial z^q}\Theta_1\left(z;-\frac{\alpha}{4},\frac{3\alpha}{4}\right) < \infty. \tag{17}$$

Из (16) и (17), учитывая, что

$$\Theta_{2,1}\left(z;-\frac{\alpha}{4},\frac{3\alpha}{4}\right) = \Theta_1\left(z;-\frac{\alpha}{4},\frac{3\alpha}{4}\right),$$

следует, что

$$|z|^{1+\theta_1}\frac{\partial^q}{\partial z^q}\Theta_1\left(z;-\frac{\alpha}{4},\frac{3\alpha}{4}\right) \le C\exp\left(-\sigma|z|^{\frac{4}{4-\alpha}}\right), \text{ если } \theta_1 > 0,$$

таким образом следует справедливость оценки (14) при $\theta > -1$.

Теорема существования. Пусть функции $\varphi_0(t) = D_{0t}^{-\zeta}\overline{\varphi}_0(t)$, $t^{1-\zeta_1}\overline{\varphi}_0(t) \in C(\overline{J})$, $t^{1-\mu}\varphi_1(t) \in C(\overline{J})$, $\zeta > 0, \zeta_1 > 0$, $\zeta+\zeta_1 > \frac{\alpha}{2}$, $\mu > 0$, тогда решение задачи (7)-(9) имеет вид

$$u(x,t) = 2\int_0^t \varphi_1(\eta)\Gamma(x,t-\eta)d\eta + 2\int_0^t \varphi_0(\eta)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Gamma(x,t-\eta)d\eta. \tag{18}$$

Доказательство. Проверим действительно ли функция (18) является решением задачи (7)-(9).

Непосредственной подстановкой функции (18) в уравнение (7) с учетом (12), (13) и (14) можно показать, что функция (18) удовлетворяет уравнению (7). Из (13) и (14) очевидно, что функция (18) удовлетворяет однородному условию (8).

Проверим удовлетворяет ли функция (18) первому краевому условию из (9)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = 2\lim_{x\to 0}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t \varphi_1(\eta)\Gamma(x,t-\eta)d\eta + 2\lim_{x\to 0}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t \varphi_0(\eta)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Gamma(x,t-\eta)d\eta.$$

Так как $\varphi_0(t) = D_{0t}^{-\zeta}\overline{\varphi}_0(t)$ и $t^{1-\mu}\varphi_1(t) \in C(\overline{J})$, используя формулу дробного интегрирования по частям [7, с. 15], перепишем последнее равенство в виде

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)=\lim_{x\to 0}2\int\limits_0^t\varphi_1(\eta)\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(x,t-\eta)d\eta+\lim_{x\to 0}2\int\limits_0^t\overline{\varphi}_0(\eta)D_{t\eta}^{-\zeta}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\Gamma(x,t-\eta)d\eta.$$

Учитывая представление (10) и оценку (14), в последнем выражении можно перейти к пределу под знаком интеграла, таким образом получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)=\varphi_0(t).$$

Подставим (18) во второе условие из (9) и рассуждая аналогично, как при проверке первого условия из (9), будем иметь

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}=2\lim_{x\to 0}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\int\limits_0^t\varphi_1(\eta)\Gamma(x,t-\eta)d\eta+2\lim_{x\to 0}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\int\limits_0^t\varphi_0(\eta)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Gamma(x,t-\eta)d\eta. \quad (19)$$

Рассмотрим каждое слагаемое из последнего равенства отдельно. Запишем первое слагаемое в виде

$$2\lim_{x\to 0}\int\limits_0^t\varphi_1(\eta)\frac{\partial^3}{\partial x^3}\Gamma(x,t-\eta)d\eta=2\lim_{x\to 0}\int\limits_0^t\frac{\partial^3}{\partial x^3}\Gamma(x,t-\eta)[\varphi_1(\eta)-\varphi_1(t)]d\eta+$$
$$+2\varphi_1(t)\lim_{x\to 0}\int\limits_0^t\frac{\partial^3}{\partial x^3}\Gamma(x,t-\eta)d\eta=2\lim_{x\to 0}\left(\int\limits_0^{t-\varepsilon}+\int\limits_{t-\varepsilon}^t\right)\frac{\partial^3}{\partial x^3}\Gamma(x,t-\eta)[\varphi_1(\eta)-\varphi_1(t)]d\eta+$$
$$+2\varphi_1(t)\lim_{x\to 0}\int\limits_0^t\frac{\partial^3}{\partial x^3}\Gamma(x,t-\eta)d\eta.$$

Далее введем следующие обозначения и рассмотрим каждый интеграл отдельно

$$I_1=\int\limits_0^{t-\varepsilon}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\Gamma(x,t-\eta)[\varphi_1(\eta)-\varphi_1(t)]d\eta,$$

$$I_2=\int\limits_{t-\varepsilon}^{t}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\Gamma(x,t-\eta)[\varphi_1(\eta)-\varphi_1(t)]d\eta,$$

$$I_3=\varphi_1(t)\int\limits_0^t\frac{\partial^3}{\partial x^3}\Gamma(x,t-\eta)d\eta.$$

Из представления (10) и соотношений (11), (14) очевидно, что

$$\lim_{x\to 0+} I_1 = 0. \tag{20}$$

Из (14) с учетом замечания 1 имеем

$$|I_2| \leq \omega(\varepsilon)\int\limits_{t-\varepsilon}^{t}\left|\frac{\partial^3}{\partial x^3}\Gamma(x,t-\eta)\right|d\eta \leq \omega(\varepsilon)\int\limits_{t-\varepsilon}^{t}|x|^{-\theta}(t-\eta)^{\frac{\alpha\theta}{4}-1}\exp\left(-\sigma|x|^{\frac{4}{4-\alpha}}(t-\eta)^{-\frac{\alpha}{4-\alpha}}\right)d\eta \leq$$

$$\leq C\omega(\varepsilon)\int\limits_{0}^{\infty} z^{-\theta-1}\exp\left(-\sigma z^{\frac{4}{4-\alpha}}\right)dz \leq C\omega(\varepsilon),$$

где θ - близкое к нулю отрицательное число,

$$\omega(\varepsilon) = \sup_{\eta\in(t-\varepsilon,t)}|\varphi_1(\eta)-\varphi_1(t)|,\ \varepsilon>0.$$

Учитывая произвольность выбора ε, получим

$$\lim_{x\to 0+} I_2 = 0. \tag{21}$$

Далее так как

$$\lim_{x\to 0+}\int\limits_0^t \frac{\partial^3}{\partial x^3}\Gamma(x,t-\eta)d\eta =$$

$$= -\frac{1}{4}\lim_{x\to 0+}\left[e^{-i\pi}\phi\left(-\frac{\alpha}{4};1;-|x|t^{-\frac{\alpha}{4}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)+e^{i\pi}\phi\left(-\frac{\alpha}{4};1;-|x|t^{-\frac{\alpha}{4}}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\right] = \frac{1}{2}, \tag{22}$$

имеем

$$\lim_{x\to 0+} I_3 = \frac{1}{2}\varphi_1(t). \tag{23}$$

Таким образом из (20), (21) и (23), имеем

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\int\limits_0^t \Gamma(x,t-\eta)\varphi_1(\eta)d\eta = \frac{1}{2}\varphi_1(t). \tag{24}$$

Рассмотрим второе слагаемое из (19), так как $\varphi_0(t) = D_{0t}^{-\zeta}\overline{\varphi}_0(t)$, $t^{1-\zeta_1}\overline{\varphi}_0(t)\in C(\overline{J})$, с учетом (14) и если $\zeta+\zeta_1 > \frac{\alpha}{2}$, получим, что

$$2\lim_{x\to 0+}\int\limits_0^t \bar{\varphi}_0(\eta)D_{t\eta}^{-\zeta}\frac{\partial^5}{\partial x^5}\Gamma(x,t-\eta)d\eta = 0. \tag{25}$$

Таким образом из (24) и (25) имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}=\varphi_1(t)+2\lim_{x\to 0}\int\limits_0^t \overline{\varphi}_0(\eta)D_{t\eta}^{-\zeta}\frac{\partial^5}{\partial x^5}\Gamma(x,t-\eta)d\eta=\varphi_1(t).$$

Теорема доказана.

Теорема единственности. В классе функций, удовлетворяющих условию

$$\lim_{x\to+\infty} t^{1-\alpha}u(x,t)\exp\left(-\rho|x|^{\frac{4}{4-\alpha}}\right)=0, \tag{26}$$

где ρ — положительная постоянная, существует не более одного решение задачи (7)-(9).

Доказательство. Пусть $h_r(x)$ функция вида

$$h_r(x)=\begin{cases}1, & x\le r,\\ 0, & x\ge r+1,\end{cases} \tag{27}$$

удовлетворяющая следующим свойствам

$$0\le h_r(x)\le 1,\quad \left|h_r^{(j)}(x)\right|\le \text{const},$$

$$h_r^{(j)}(x)=0 \ \text{ при } \ x\notin(r,r+1), \tag{28}$$

где $j=\overline{1,4}$, const - постоянная, не зависящая от x и r.

Рассмотрим функцию

$$v(x,t,\xi,\eta)=h_r(\xi)D_{t\eta}^{-\chi}G(x,t,\xi,\eta),\quad \chi>0,$$

где

$$G(x,t,\xi,\eta)=\left[\Gamma(x+\xi,t-\eta)+\Gamma(x-\xi,t-\eta)\right].$$

Заметим, что

$$\frac{\partial G(x,t,\xi,\eta)}{\partial\xi}\Big|_{\xi=0}=0,\qquad \frac{\partial^3 G(x,t,\xi,\eta)}{\partial\xi^3}\Big|_{\xi=0}=0. \tag{29}$$

Пусть $u(x,t)$ - решение однородной задачи (7)-(9), т.е

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0}=0,\qquad \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}\Big|_{x=0}=0. \tag{30}$$

Домножим уравнение (7) на функцию $v(x,t,\xi,\eta)$ и проинтегрируем

$$\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^{x-\varepsilon}+\int\limits_{x+\varepsilon}^{\infty}\right)v(x,t,\xi,\eta)Lu(\xi,\eta)d\xi d\eta=$$

$$= \int_0^t \left(\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \right) v(x,t,\xi,\eta) D_{0\eta}^{\alpha} u(\xi,\eta) d\xi d\eta +$$

$$+ \int_0^t \left(\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \right) v(x,t,\xi,\eta) \frac{\partial^4 u(\xi,\eta)}{\partial \xi^4} d\xi d\eta.$$

Из формулы дробного интегрирования по частям [7, с. 15]

$$\int_a^b g(s) D_{as}^{\mu} h(s) ds = \int_a^b h(s) D_{bs}^{\mu} g(s) ds \quad (\mu \le 0),$$

и в силу (28), а также равенств

$$\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} h_r(\xi) D_{t\eta}^{-\chi} G(x,t,\xi,\eta) =$$

$$= \sum_{j=0}^{3} \frac{4!}{j!(4-j)!} \frac{d^{(4-j)}}{d\xi^{(4-j)}} h_r(\xi) \frac{\partial^j}{\partial \xi^j} D_{t\eta}^{-\chi} G(x,t,\xi,\eta) + h_r(\xi) \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} D_{t\eta}^{-\chi} G(x,t,\xi,\eta),$$

и (см. (29), (30))

$$\sum_{j=0}^{3} (-1)^j \frac{\partial^j \left(D_{t\eta}^{-\chi} G(x,t,\xi,\eta) \right)}{\partial \xi^j} \frac{\partial^{3-j} u(\xi,\eta)}{\partial \xi^{3-j}} \Big|_{\xi=0} = 0,$$

получим

$$0 = \int_0^t \left(\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \right) v(x,t,\xi,\eta) \left[D_{0\eta}^{\alpha} + \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} \right] u(\xi,\eta) d\xi d\eta =$$

$$= \int_0^t \left(\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \right) u(\xi,\eta) h_r(\xi) \left[D_{t\eta}^{\alpha} + \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} \right] D_{t\eta}^{-\chi} G(x,t,\xi,\eta) d\xi d\eta +$$

$$+ \int_0^t \sum_{j=0}^{3} (-1)^j \frac{\partial^j \left(D_{t\eta}^{-\chi} G(x,t,\xi,\eta) \right)}{\partial \xi^j} \frac{\partial^{3-j} u(\xi,\eta)}{\partial \xi^{3-j}} \Big|_{x+\varepsilon}^{x-\varepsilon} d\eta +$$

$$+ \int_0^t \left(\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \right) u(\xi,\eta) \sum_{j=0}^{3} \frac{(4)!}{j!(4-j)!} \frac{d^{(4-j)}}{d\xi^{(4-j)}} h_r(\xi) \frac{\partial^j}{\partial \xi^j} D_{t\eta}^{-\chi} G(x,t,\xi,\eta) d\xi d\eta.$$

Перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$ в последнем равенстве и в силу того, что $u(x,t)$ является решением однородной задачи (7)-(9), и так как

$$\left(D_{t\eta}^{\alpha} + \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} \right) D_{t\eta}^{-\chi} G(x,t,\xi,\eta) = 0,$$

с учетом равенств (15), (27) следует, что при $x < r$

$$D_{0t}^{-\chi}u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{r<\xi<r+1} u(\xi,\eta) \sum_{j=0}^{3} \frac{4!}{j!(4-j)} \frac{d^{(4-j)}}{d\xi^{(4-j)}} h_r(x) \frac{\partial^j}{\partial \xi^j} G(x,t,\xi,\eta) d\xi d\eta.$$

Из вида функции $G(x,t,\xi,\eta)$ и (14) получим, что

$$|D_{0t}^{-\chi}u(x,t)| \leq C \int\limits_0^t \int\limits_{r<\xi<r+1} |u(\xi,\eta)| \exp\left(-\sigma \frac{(x-\xi)^{\frac{4}{4-\alpha}}}{(t-\eta)^{\frac{\alpha}{4-\alpha}}}\right) d\xi d\eta, \tag{31}$$

где $\sigma < \sigma_0 = \left(1-\frac{\alpha}{4}\right)\left(\frac{\alpha}{4}\right)^{\frac{\alpha}{4-\alpha}} \cos\frac{1}{4-\alpha}\pi$. Из (26) следует, что при $t < t_0 = \left(\frac{\sigma_0}{\rho}\right)^{\frac{4-\alpha}{\alpha}}$ интеграл в правой части (31) при $r \to \infty$ стремится к нулю. Таким образом $u(x,t) \equiv 0$ для $x \in (0,+\infty)$ и $t < t_0$.

Далее покажем, что $u(x,t) = 0$ для любого $t > 0$. Предположим, что $u(x,t) \not\equiv 0$ при $t > 0$. Обозначим через $t_1 = \inf\{t : u(x,t) \neq 0\}$. Таким образом, из доказанного следует, что $t_1 \geq t_0$. Рассмотрим функцию $p(x,t) = u(x,t_1+t)$. Учитывая сделанное предположение и определение t_1 для любого $\varepsilon > 0$ найдется значение x такое, что

$$p(x,\varepsilon) \neq 0. \tag{32}$$

Так как $u(x,t) \equiv 0$ при $0 < t < t_1$, то

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t) = D_{t_1t}^{\alpha}u(x,t) = D_{0t}^{\alpha}p(x,t).$$

Отсюда следует, что $p(x,t)$ является решением уравнения (7), удовлетворяет начальному условию

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}p(x,t) = 0, \quad 0 < t < t_0$$

и условию (26). Таким образом из доказанного выше следует, что $p(x,t) \equiv 0$, по крайней мере для $0 < t < t_1$, а это противоречит (32). Следовательно предположение не верно и $u(x,t) \equiv 0$ для любого $t > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.
2. *Кочубей А.Н.* Диффузия дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26, № 4. С. 660-670.
3. *Псху А.В.* Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // Изв. РАН Сер. матем. 2009. Т. 73, № 2. С. 141-182.
4. *Agrawal O.P.* A general solution for a fourth-order fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain // Computers and Structures, 2001, vol. 79, no. 16, pp. 1497-1501.
5. *Ворошилов А.А., Килбас А.А.* Задача Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, №5. С. 599-609.

6. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier Science, 2006, vol. 204, 540 p.
7. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
8. *Мамчуев М.О.* Краевые задачи для уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядка. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2013. 200 с.
9. *Геккиева С.Х.* Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной в полубесконечной области // Известия КБНЦ РАН, 2002. Т. 1, № 8. С. 6-8.
10. *Мамчуев М.О.* Краевые задачи для уравнения диффузии дробного порядка с постоянными коэффициентами // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 2005. Т. 7, № 2. С. 37-44.
11. *Карашева Л.Л.* Задача Коши для параболического уравнения высокого четного порядка с дробной производной по временной переменной // Сибирские электронные математические известия. 2018. Т. 15. С. 696-706.
12. *Карашева Л.Л.* Задача в полуполосе для параболического уравнения четвертого порядка с оператором Римана – Лиувилля по временной переменной печатная // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2019. № 5 (91). С. 21-29.
13. *Wright E.M.* On the coefficients of power series having exponential singularities // J. London Math. Soc., 1933, vol. 8, no. 29, pp. 71-79.

ABSTRACT

In this work a fourth-order inhomogeneous parabolic equation with time fractional derivative is considered. The boundary-value problem in the half-strip for equation under consideration is studied. In this paper a fundamental solution for fourth-order parabolic equation with time fractional derivative in terms of the Wright function is presented, a representation of the solution of the problem is constructed and uniqueness of the solution in the class of fast growth functions is proved.

Keywords: Riemann – Liouville fractional derivative, fourth order parabolic equation, problem in the half-strip.

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik
E-mail: k.liana86@mail.ru

© L.L. Karasheva, 2021

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе рассматривается неоднородное параболическое уравнение четвертого порядка с дробной производной по временной переменной. Для рассматриваемого уравнения исследуется краевая задача в полуполосе. В работе дано фундаментальное решение параболического уравнения четвертого порядка с дробной производной по временной переменной в терминах функции Райта, построено представление решения поставленной задачи, доказана единственность решения в классе функций быстрого роста.

Ключевые слова: дробная производная Римана – Лиувилля, параболическое уравнение четвертого порядка, задача в полуполосе.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик
E-mail: k.liana86@mail.ru

© Л.Л. Карашева, 2021