УДК 517.91
DOI 10.47928/1726-9946-2021-21-3-16-20

Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с переменным запаздыванием

Мажгихова М.Г.

Представлено академиком АМАН А.В. Псху

Рассмотрим уравнение

$$\partial_{0t}^{\alpha} u(t) - \lambda u(t) - \mu u(t - \tau(t)) = f(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

где ∂_{0t}^{α} – дробная производная Капуто [1, с. 9] $0 < \alpha \leq 1$, λ, μ – произвольные постоянные, $\tau(t)$ – непрерывная положительная функция.

Теории дробного исчисления посвящены монографии [1–4] (см. ссылки там же). Барреттом в 1954 году в работе [5] методом последовательных приближений найдено явное решение дифференциального уравнения дробного порядка. Для линейного дифференциального уравнения дробного порядка общего вида в работе [6] доказана теорема существования и единственности.

Отметим монографии, посвященые дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом: [7–10]. Для обыкновенного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом постановки начальной и краевых задач приведены в работе [11].

Для дифференциального уравнения вида (1) с постоянным запаздыванием раннее были доказаны теоремы существования и единственности решения начальной задачи и задачи с условиями Штурма-Лиувилля в работе [12], а в работах [13] и [14] соответственно исследованы краевые задачи Дирихле и Неймана.

В данной работе получено решение начальной задачи для дифференциального уравнения (1) с переменным запаздыванием.

Регулярным решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(t)$, имеющую абсолютно непрерывную производную первого порядка и удовлетворяющую этому уравнению при $t > 0$.

Задача. *Найти регулярное решение* $u(t)$ *уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям*

$$u(t) = \varphi_0(t), \quad T \leq t \leq 0, \tag{2}$$

где $T = \inf\{t : t - \tau(t) \leq 0\}$. Отметим, что значение T может равняться $-\infty$.

Пусть $\tau(0) > 0$. Разобъем луч $[0; \infty)$ точками t_k

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} \cdots < t_N, \tag{3}$$

такими, что

$$t_k = \sup\{s : t - \tau(t) \leq t_{k-1}, t_{k-1} < t < s\}.$$

Пусть N – номер последнего элемента последовательности (3). Если $t_k = \infty$, то полагаем, что $N = k$; при каждом $t_k < \infty$ $N = \infty$. Тогда

$$I = \bigcup_{k=1}^{N} I_k, \quad I_k = [t_{k-1}, t_k]; \tag{4}$$

Пусть $\varphi_k(t)$ – решение уравнения (1) на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi_k(t_{k-1}) = \varphi_{k-1}(t_{k-1})$.

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть функция $f(t) \in C(0,\infty)$ и справедливо представление вида*

$$F_s = D_{t_s t}^{\alpha-1} g(t), \quad g(t) \in L(t_s, t_{s+1}), \quad s = \overline{0, N},$$

где

$$F_0(t) = f(t) + \mu\varphi_0(t - \tau(t)), \quad F_k(t) = f(t) + \mu\varphi_k(t - \tau(t)) - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{n=1}^{k} \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{\varphi_n'(\xi) d\xi}{(t-\xi)^\alpha}, \tag{5}$$

$$\varphi_k(t) = \varphi_{k-1}(t_{k-1}) E_{\alpha,1}(\lambda(t - t_{k-1})^\alpha) + \int\limits_0^t H(\xi - t_{k-1}) F_{k-1}(\xi)(t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\xi)^\alpha) d\xi, \tag{6}$$

$t_0 = 0$, $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}$ *– функция Миттаг-Леффлера [15, с. 117] .*

Тогда существует единственное решение $u(t)$ задачи (1), (2) *для любого $t \in [t_{k-1}, t_k]$, где $k = \overline{1, \infty}$.*

Доказательство. Решение задачи будем искать методом шагов на каждом из отрезков $I_k = [t_{k-1}, t_k]$. На первом отрезке $t \in [0, t_1]$, $t_1 = \sup\{t : t - \tau(t) \le 0\}$, получаем, что $t - \tau(t) \in [T, 0]$, а $u(t - \tau(t)) = \varphi_0(t - \tau(t))$. Тогда решение задачи (1), (2) определяется из задачи с уравнением без запаздывания

$$\partial_{0t}^{\alpha} u(t) - \lambda u(t) = F_0(t), \quad u(0) = \varphi_0(0), \tag{7}$$

где $F_0(t) = f(t) + \mu\varphi_0(t - \tau(t))$. Решение задачи (7) имеет вид [3, с. 17]:

$$u(t) = \varphi_0(0) E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) + \int\limits_0^t F_0(\xi)(t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\xi)^\alpha) d\xi = \varphi_1(t).$$

Далее, на отрезке $[t_1, t_2]$, $t_2 = \sup\{t : t - \tau(t) \le t_1\}$, $t - \tau(t) \in [t_0, t_1]$, $u(t - \tau(t)) = \varphi_1(t - \tau(t))$, решение задачи (1), (2) определяется из задачи

$$\partial_{t_1 t}^{\alpha} u(t) - \lambda u(t) = F_1(t), \quad u(t_1) = \varphi_1(t_1)$$

в виде:

$$u(t) = \varphi_1(t_1)E_{\alpha,1}(\lambda(t-t_1)^\alpha) + \int\limits_0^t H(\xi - t_1)F_1(\xi)(t-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\xi)^\alpha) = \varphi_2(t),$$

$F_1(t) = f(t) + \mu\varphi_1(t-\tau(t)) - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{\varphi_1'(\xi)d\xi}{(t-\xi)^\alpha}$. Продолжая аналогичным образом, последовательно на каждома отрезке $[t_k, t_{k+1}]$, где

$$t_{k+1} = \sup\{s : t - \tau(t) \le t_k, t_k < t < s\},$$

находим решение задачи:

$$\partial_{t_k t}^\alpha u(t) - \lambda u(t) = F_k, \quad u(t_k) = \varphi_k(t_k),$$

откуда

$$u(t) = \varphi_k(t_k)E_{\alpha,1}(\lambda(t-t_k)^\alpha) + \int\limits_0^t H(\xi - t_k)F_k(\xi)(t-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\xi)^\alpha)d\xi,$$

$F_k(t)$ определяется формулой (5).

Единственность решений на каждом из отрезков I_k (4) следует из тривиальности решения однородной задачи, соответстсвующей задаче (1), (2).

Теорема доказана.

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее уравнению (1) при $\tau(t) = \sqrt{t+1}$. Пусть начальная функция $\varphi_0(t) = t$ при $[T, 0]$:

$$\partial_{0t}^\alpha u(t) - \lambda u(t) - \mu u(t - \sqrt{t+1}) = 0, \quad t > 0,$$
$$u(t) = t, \quad T \le t \le 0.$$

На первом отрезке $[0, t_1]$, где $t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, задача ставится следующим образом:

$$\partial_{0t}^\alpha u(t) - \lambda u(t) = F_0(t), \quad u(0) = 0,$$

а ее решение имеет вид:

$$u(t) = E_{\alpha,1}(\lambda(t-1)^\alpha) + \int\limits_0^t F_0(\xi)(t-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\xi)^\alpha)d\xi = \varphi_1(t),$$

где $F_0(t) = \mu(t - \sqrt{t+1})$. На втором отрезке $[t_1, t_2]$, где $t_2 = \frac{\sqrt{2\sqrt{5}+7}+\sqrt{5}+2}{2}$, находим решение задачи

$$\partial^{\alpha}_{t_1 t} u(t) - \lambda u(t) = F_1(t), \quad u(t_1) = \varphi_1(t_1),$$

где $F_1(t) = \mu\varphi_1(t - \sqrt{t+1}) - \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int\limits_0^{t_1} \frac{\varphi_1'(\xi)d\xi}{(t-\xi)^{\alpha}}$, в виде

$$u(t) = \varphi_1(t_1)E_{\alpha,1}(\lambda(t-t_1)^{\alpha}) + \int\limits_{t_1}^{t} F_1(\xi)(t-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\xi)^{\alpha})d\xi = \varphi_2(t).$$

Таким образом, на каждом отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ решение задачи:

$$\partial^{\alpha}_{t_k t} u(t) - \lambda u(t) = F_k(t), \quad u(t_k) = \varphi_k(t_k),$$

где

$$F_k(t) = \mu\varphi_k(t - \sqrt{t+1}) - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{n=1}^{k} \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{\varphi_n'(\xi)d\xi}{(t-\xi)^{\alpha}}, \quad t_0 = 0,$$

имеет следующий вид:

$$u(t) = \varphi_k(t_k)E_{\alpha,1}(\lambda(t-t_k)^{\alpha}) + \int\limits_{t_k}^{t} F_k(\xi)(t-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\xi)^{\alpha})d\xi,$$

где точку t_{k+1} можно определить по формуле

$$t_{k+1} = \frac{1}{2}(2t_k + \sqrt{4t_k+5} + 1).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam, ELSEVIER, 2006, 524 p.
3. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 195 с.
4. *Oldham K.B., Spanier J.* The fractional calculus. Acad. press: N.-Y. L., 1974, 234 p.
5. *Barrett J.H.* Differential equation of non-integer order // Canad. J. Math., 1954, vol. 6, no. 4, pp. 529-541.
6. *Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН АрмССР. Матем., 1968. С. 3-28.
7. *Bellman R.E., Cooke K.L.* Differential-difference equations. Acad. Press: New York. London. 1963. 462 p.
8. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука. 1971. 296 с.
9. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 351 с.

10. *Hale J.K, Lunel S.M.V.* Introduction to functional differential equations. Springer: New York. London, 1993, 449 p.
11. *Норкин С.Б.* О решениях линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом // УМН. 1959. Т. 14. №1. С. 199-206.
12. *Мажгихова М.Г.* Начальная и краевая задачи для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Челяб. физ.-матем. журн. 2018. Т. 3, №1. С. 27-37.
13. *Мажгихова М.Г.* Задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, №2. С. 187-194.
14. *Мажгихова М.Г.* Задача Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Известия КБНЦ РАН. 2016. Т. 70, №2. С. 15-20.
15. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.

ABSTRACT

For a fractional differential equation with variable delay, a solution to the initial problem is obtained by the method of steps. The existence and uniqueness theorem of the solution is proved.

Keywords: fractional differential equation, differential equation with variable delay, method of steps.

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik
E-mail: madina.mazhgihova@yandex.ru

АННОТАЦИЯ

Для дифференциального уравнения дробного порядка с переменным запаздыванием получено решение начальной задачи методом шагов. Доказана теорема существования и единственности решения.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение дробного порядка, дифференциальное уравнение с переменным запаздыванием, метод шагов.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик
E-mail: mazhgihova.madina@yandex.ru