

УДК 519.63

DOI: 10.47928/1726-9946-2021-21-4-45-55

Локально-одномерная схема для параболического уравнения общего вида, описывающего микрофизические процессы в конвективных облаках

Ашабоков Б.А., Хибиев А.Х., Шхануков-Лафишев М.Х. – академик АМАН

Посвящается 30-летию ИПМА КБНЦ РАН

Введение. Краевые задачи для параболических уравнений с нелокальным источником возникают при изучении диффузии в турбулентной плазме, при описании функции распределения по массам капель и ледяных частиц, изменения функции распределения капель за счет микрофизических процессов конденсации, коагуляции капель, дробления и замерзания [1]-[6]. Введём функцию $u(x, y, z, m, t)$ такую, что $u(x, y, z, m, t) dm$ даёт в каждой точке (x, y, z) в момент времени t концентрацию облачных капель, масса которых заключена в интервале от m до $m + dm$. При этом $u(x, y, z, m, t) dm$ есть вероятность того, что масса облачных капель в момент времени t находится между m и $m + dm$, величина $u(x, y, z, m, t)$ называется плотностью вероятности.

1. Постановка задачи. В цилиндре $Q_T = G \times [0 < t \leq T]$, основанием которого служит прямоугольный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p\}$ с границей Γ рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, m, t), (x, t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u|_{\Gamma} = 0, u(x, m, 0) = u_0(x, m), \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned} Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + r_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{p} q(x, m, t) u(x, m, t) + \\ + \frac{1}{p} \int_0^{m_1} Q(m, m') P(m') u(x, m', t) dm' - \frac{1}{p} u(x, m, t) \int_0^{m_1} \beta_1(m, m') u(x, m', t) dm' + \\ + \frac{1}{p} \int_0^{m_1} u(x, m - m', t) \beta_1(m, m - m') u(x, m', t) dm', \end{aligned} \tag{3}$$

где $\beta_1(m, m') = \pi (r(m) + r(m'))^2 \cdot |V_1(m) - V_1(m')| E(m, m')$, $r(m), r(m')$ – радиусы сталкивающихся частиц; $V_1(m), V_1(m')$ – их скорости падения; $E(m, m')$ – коэффициент захвата для капель, $\pi(r)$ – безразмерное давление, $q(x, m, t) = P(m) + R(x, m)$, $P(m)$ – вероятность распада в единицу времени капли массой m , $R(x, m)$ – вероятность замерзания в единицу времени капли массой m , $Q(m, m')$ – вероятность образования капли

массой m при распаде капли массой m' , $T_m(m)$ – медианная температура замерзания капель массой m , $T_b(x)$ – температура воздуха в указанной точке, $r_\alpha(x, t)$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$ – компоненты вектора скорости воздушных потоков, m_1 – максимальная масса (0.13 г.) капель в облаке.

Функции $Q(m, m')$, $P(m)$, $R(x, m)$ рассчитываются по следующим формулам (см. [7]):

$$\begin{aligned} P(m) &= 2.94 \cdot 10^{-7} \cdot \exp(34 \cdot r(m)), \\ R(x, m) &= A \cdot \exp[B \cdot (T_m(m) - T_b(x))], \\ Q(m, m') &= \frac{145.37}{m} \cdot \frac{r(m)}{r(m')} \cdot \exp\left(-7 \cdot \frac{r(m)}{r(m')}\right), \end{aligned}$$

где A, B – параметры.

Уравнение (1) записано с учетом изменения функции распределения капель за счет микрофизических процессов конденсации, коагуляции капель, дробления и замерзания.

Предположим, что задача (1)–(2) имеет единственное достаточно гладкое решение. При оценке порядка аппроксимации будем предполагать, что $k_\alpha(x, t) \in C^{3,1}(\bar{Q}_T)$, $r_\alpha(x, t)$, $q(x, m, t)$, $f(x, m, t) \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$, где $C^{n_1, n_2}(\bar{Q}_T)$ – класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными порядка n_1 по x и n_2 по t в замкнутой области \bar{Q}_T .

2. Локально-одномерная схема (ЛОС). На отрезке $[0, T]$ введём равномерную сетку $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0\}$ с шагом $\tau = \frac{T}{j_0}$. Каждый интервал (t_j, t_{j+1}) разобьём на p частей точками $t_{j+\frac{\alpha}{p}} = t_j + \frac{\alpha}{p}\tau$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$ и обозначим через $\Delta_\alpha = \left(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}, t_{j+\frac{\alpha}{p}}\right]$. Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_α с шагом $h_\alpha = \frac{l_\alpha}{N_\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$:

$$\bar{\omega}_h = \prod_{\alpha=1}^p \bar{\omega}_{h_\alpha}, \quad \bar{\omega}_{h_\alpha} = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha : i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p\}.$$

Уравнение (1) перепишем в виде

$$\mathfrak{R}u = \frac{\partial u}{\partial t} - Lu - f = 0, \quad (4)$$

или

$$\sum_{\alpha=1}^p \mathfrak{R}_\alpha u = 0, \quad \mathfrak{R}_\alpha u = \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} - L_\alpha u - f_\alpha, \quad \sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = f, \quad (5)$$

где $f_\alpha(x, m, t)$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$ – произвольные функции (обладающие той же гладкостью, что и $f(x, m, t)$), удовлетворяющие условию нормировки

$$f_1 + f_2 + \dots + f_p = f.$$

На каждом полуинтервале Δ_α , $\alpha = 1, 2, \dots, p$, будем последовательно решать задачи

$$\mathfrak{R}_\alpha v_{(\alpha)} = \frac{1}{p} \frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} - L_\alpha v_{(\alpha)} - f_\alpha = 0, \quad x \in G, \quad t \in \Delta_\alpha, \quad (6)$$

$$v_{(\alpha)} = 0, \quad x_\alpha = 0, \quad x_\alpha = l_\alpha,$$

полагая при этом [8, с. 522]

$$v_{(1)}(x, m, 0) = u_0(x, m), \quad v_{(1)}(x, m, t_j) = v_{(p)}(x, m, t_j), \quad j = 0, 1, \dots, j_0,$$

$$v_{(\alpha)}\left(x, m, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right) = v_{(\alpha-1)}\left(x, m, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right), \quad \alpha = 2, 3, \dots, p.$$

Аппроксимируем каждое уравнение (6) номера α двухслойной схемой на полуинтервале Δ_α , тогда получим цепочку p одномерных разностных схем:

$$\begin{aligned} \frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} &= \Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \\ \Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} &= \varkappa_\alpha \left(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} \right)_{x_\alpha} + b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1\alpha)} y_{x_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} + b_\alpha^- a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \frac{1}{p} dy^{j+\frac{\alpha}{p}} - \\ &\quad - \frac{1}{p} y^{j+\frac{\alpha-1}{p}} \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \beta_1(m, m_{i_m}) y^{j+\frac{\alpha}{p}}(x, m_{i_m}, t) \bar{h}_m + \\ &\quad + \frac{1}{p} \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}(x, m - m_{i_m}, t) \beta_1(m, m - m_{i_m}) y^{j+\frac{\alpha}{p}}(x, m_{i_m}, t) \bar{h}_m + \\ &\quad + \frac{1}{p} \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} Q(m, m_{i_m}) P(m_{i_m}) y^{j+\frac{\alpha}{p}}(x, m_{i_m}, t) \bar{h}_m, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\gamma_{h,\alpha}$ – множество граничных узлов по направлению x_α , $\alpha = k_\alpha(x^{(-0.5h_\alpha)}, \bar{t})$,

$$\begin{aligned} x^{(-0.5h_\alpha)} &= (x_1, x_2, \dots, x_{\alpha-1}, x_\alpha - 0.5h_\alpha, x_{\alpha+1}, \dots, x_p), \\ \bar{t} = t^{j+\frac{1}{2}}, \quad \varkappa &= \frac{1}{1 + R_\alpha}, \quad R_\alpha = \frac{0.5h_\alpha |r_\alpha|}{k_\alpha} - \text{разностное число Рейнольдса,} \\ r_\alpha^+ &= 0.5(r_\alpha + |r_\alpha|) \geq 0, \quad r_\alpha^- = 0.5(r_\alpha - |r_\alpha|) \leq 0, \quad r_\alpha = r_\alpha^+ + r_\alpha^-, \\ b_\alpha^+ &= \frac{r_\alpha^+}{k_\alpha}, \quad b_\alpha^- = \frac{r_\alpha^-}{k_\alpha}, \quad a_i = k_{i-\frac{1}{2}}(\bar{t}), \quad \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = f_\alpha(x, m, t_{j+0.5}), \quad d = q, \end{aligned}$$

$$\bar{h}_m = \begin{cases} h_m, & i_m = 1, 2, \dots, N_m - 1, \\ h_m/2, & i_m = 0, N_m, \end{cases}$$

$$y^{j+\frac{\alpha}{p}}|_{\gamma_{h,\alpha}} = 0, \quad y(x, m, 0) = u_0(x, m), \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \quad (8)$$

3. Погрешность аппроксимации ЛОС. Характеристикой точности решения локально-одномерной схемы является разность $z^{i+\frac{\alpha}{p}} = y^{i+\frac{\alpha}{p}} - u^{i+\frac{\alpha}{p}}$, где $u^{i+\frac{\alpha}{p}}$ – решение исходной задачи (1)–(2). Подставляя $y^{i+\frac{\alpha}{p}} = z^{i+\frac{\alpha}{p}} + u^{i+\frac{\alpha}{p}}$ в разностное уравнение (7), получим для погрешности задачу

$$\frac{z^{j+\frac{\alpha}{p}} - z^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha z^{j+\frac{\alpha}{p}} + \Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad (9)$$

$$z^{j+\frac{\alpha}{p}} = 0, \text{ при } x \in \gamma_{h,\alpha}, z(x, m, 0) = 0. \quad (10)$$

Обозначив через

$$\overset{\circ}{\Psi}_\alpha = \left(L_\alpha u + f_\alpha - \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{j+\frac{1}{2}},$$

и замечая, что $\sum_{\alpha=1}^p \overset{\circ}{\Psi}_\alpha = 0$, если $\sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = f$, представим погрешность в виде суммы $\Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \overset{\circ}{\Psi}_\alpha + \Psi_\alpha^*$:

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} &= \Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} - \frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} + \overset{\circ}{\Psi}_\alpha - \overset{\circ}{\Psi}_\alpha = \left(\Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} - L_\alpha u^{j+\frac{1}{2}} \right) + \\ &+ \left(\varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} - f_\alpha^{j+\frac{1}{2}} \right) - \left(\frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} - \frac{1}{p} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^{j+\frac{1}{2}} \right) + \overset{\circ}{\Psi}_\alpha = \overset{\circ}{\Psi}_\alpha + \Psi_\alpha^*. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\Psi_\alpha^* = O(h_\alpha^2 + \tau)$, $\overset{\circ}{\Psi}_\alpha = O(1)$, $\sum_{\alpha=1}^p \overset{\circ}{\Psi}_\alpha = 0$, то есть ЛОС обладает суммарной аппроксимацией $O(|h|^2 + \tau)$, $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_p^2$.

4. Устойчивость ЛОС. Умножим уравнение (7) скалярно на $y^{(\alpha)} = y^{j+\frac{\alpha}{p}}$:

$$\left(y_{\bar{t}}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)} \right)_\alpha = \left(\Lambda_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)} \right)_\alpha + \left(\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)} \right)_\alpha, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} (u, v)_\alpha &= \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1} u_{i_\alpha} v_{i_\alpha} h_\alpha, \quad (u, v]_\alpha = \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha} u_{i_\alpha} v_{i_\alpha} h_\alpha, \\ (u, v) &= \sum_{x \in \omega_h} uvH, \quad H = \prod_{\alpha=1}^p h_\alpha. \end{aligned}$$

Преобразуем каждое слагаемое тождества (11): $\left(y_{\bar{t}}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)} \right) = \frac{1}{2} \left(\|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 \right)_{\bar{t}} + \frac{\tau}{2} \|y_{\bar{t}}\|_{L_2(\alpha)}^2$,

$$\begin{aligned} \left(\Lambda_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)} \right)_\alpha &= \left(\varkappa_\alpha \left(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)} \right)_{x_\alpha}, y^{(\alpha)} \right)_\alpha + \left(b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1\alpha)} y_{x_\alpha}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)} \right)_\alpha + \left(b_\alpha^- a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)} \right)_\alpha - \\ &- \frac{1}{p} \left(dy^{(\alpha)}, y^{(\alpha)} \right) + \frac{1}{p} \left(\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} Q(m, m_{i_m}) P(m_{i_m}) y^{(\alpha)}(x, m_{i_m}, t) \bar{h}_m, y^{(\alpha)} \right)_\alpha - \\ &- \frac{1}{p} \left(y^{j+\frac{\alpha-1}{p}} \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \beta_1(m, m_{i_m}) y^{j+\frac{\alpha}{p}}(x, m_{i_m}, t) \bar{h}_m, y^{(\alpha)} \right)_\alpha + \\ &+ \frac{1}{p} \left(\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}(x, m - m_{i_m}, t) \beta_1(m, m - m_{i_m}) y^{j+\frac{\alpha}{p}}(x, m_{i_m}, t) \bar{h}_m, y^{(\alpha)} \right)_\alpha, \end{aligned}$$

где $\varkappa = \frac{1}{1+R}$, $R_\alpha = \frac{0.5h_\alpha|r_\alpha|}{k_\alpha}$.

Так как $\varkappa_\alpha = 1 - \frac{0.5h_\alpha|r_\alpha|}{k_\alpha} + O(h_\alpha^2)$, то \varkappa заменим на $1 - \frac{0.5h_\alpha|r_\alpha|}{k_\alpha}$. Тогда последнее выражение перепишем в виде

$$\begin{aligned}
 (\Lambda_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)})_\alpha &= - (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^2)_\alpha + (b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1\alpha)} y_{x_\alpha}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)})_\alpha + (b_\alpha^- a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)})_\alpha - \frac{1}{p} (dy^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}) + \\
 &+ 0.5h_\alpha \left(a_\alpha \left(\frac{|r_\alpha|}{k_\alpha} \right)_{\bar{x}_\alpha}, y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)} y^{(\alpha)} \right)_\alpha + 0.5h_\alpha \left(a_\alpha \left(\frac{|r_\alpha|}{k_\alpha} \right)_{i_\alpha-1}, y_{\bar{x}_\alpha}^2 \right)_\alpha + \\
 &+ \frac{1}{p} \left(\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} Q(m, m_{i_m}) P(m_{i_m}) y^{(\alpha)}(x, m_{i_m}, t) \hbar_m, y^{(\alpha)} \right)_\alpha - \\
 &- \frac{1}{p} \left(y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}(x, m, t) \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \beta_1(m, m_{i_m}) y^{j+\frac{\alpha}{p}}(x, m_{i_m}, t) \hbar_m, y^{(\alpha)} \right)_\alpha + \\
 &+ \frac{1}{p} \left(\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}(x, m - m_{i_m}, t) \beta_1(m, m - m_{i_m}) y^{j+\frac{\alpha}{p}}(x, m_{i_m}, t) \hbar_m, y^{(\alpha)} \right)_\alpha. \quad (12)
 \end{aligned}$$

С помощью леммы 1 из [9] находим

$$\begin{aligned}
 (b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1\alpha)} y_{x_\alpha}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)})_\alpha + (b_\alpha^- a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)})_\alpha &\leq 2 \frac{c_1 c_2}{c_0} \left(\varepsilon \|y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 + c(\varepsilon) \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 \right), \\
 0.5h_\alpha \left(a_\alpha \left(\frac{|r_\alpha|}{k_\alpha} \right)_{\bar{x}_\alpha}, y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)} y^{(\alpha)} \right)_\alpha &\leq 0.5h_\alpha c_4 \left(y^{(\alpha)}, y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)} \right)_\alpha \leq \\
 &\leq 0.5h_\alpha c_4 \left(\varepsilon \|y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 + c(\varepsilon) \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 \right), \quad \text{где } \left| a_\alpha \left(\frac{|r_\alpha|}{k_\alpha} \right)_{\bar{x}_\alpha} \right| \leq c_4, \\
 0.5h_\alpha \left(a_\alpha \left(\frac{|r_\alpha|}{k_\alpha} \right)_{i_\alpha-1}, y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)} \right)_\alpha &\leq 0.5h_\alpha c_5 \|y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2, \quad \left| a_\alpha \left(\frac{|r_\alpha|}{k_\alpha} \right)_{i_\alpha-1} \right| \leq c_5, \\
 \frac{1}{p} (dy^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}) &\leq \frac{1}{p} c_2 \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{p} \left(\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} Q(m, m_{i_m}) P(m_{i_m}) y^{(\alpha)}(x, m_{i_m}, t) \hbar_m, y^{(\alpha)} \right)_\alpha \leq \\
 &\leq \frac{1}{p} \left\| \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} Q(m, m_{i_m}) P(m_{i_m}) y^{(\alpha)}(x, m_{i_m}, t) \hbar_m \right\|_{L_2(\alpha)} \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)} \leq \\
 &\leq \varepsilon \frac{1}{p} \left\| \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} y^{(\alpha)}(x, m_{i_m}, t) \hbar_m \right\|_{L_2(\alpha)}^2 + \frac{1}{4\varepsilon p} \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 = \\
 &= \varepsilon \frac{1}{p} \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1} \left(\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} y^{(\alpha)}(x, m_{i_m}, t) \hbar_m \right)^2 h_\alpha + \frac{1}{4\varepsilon p} \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 \leq
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \varepsilon \frac{1}{p} m_1 \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1} h_\alpha \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left(y^{(\alpha)}(x, m_{i_m}, t) \right)^2 \hbar_m + \frac{1}{4\varepsilon p} \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 = \\ &= \varepsilon \frac{m_1}{p} \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha, m)}^2 + \frac{1}{4\varepsilon p} \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2, \end{aligned}$$

где $\|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha, m)}^2 = \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1} h_\alpha \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left(y^{j+\frac{\alpha}{p}} \right)^2 \hbar_m$, $m_1 = N(m_1) \hbar_m$,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p} \left(y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}(x, m, t) \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \beta_1(m, m_{i_m}) y^{j+\frac{\alpha}{p}}(x, m_{i_m}, t) \hbar_m, y^{(\alpha)} \right)_\alpha \leq \\ &\leq \|y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}(x, m, t)\|_{L_2(\alpha)} \left\| \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \beta_1(m, m_{i_m}) y^{j+\frac{\alpha}{p}}(x, m_{i_m}, t) \hbar_m \right\|_{L_2(\alpha)} \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)} \leq \\ &\leq \frac{1}{p} \varepsilon c_3 \left\| \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} y^{j+\frac{\alpha}{p}}(x, m_{i_m}, t) \hbar_m \right\|_{L_2(\alpha)}^2 + \frac{1}{4\varepsilon p} c_3 \|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\alpha)}^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{p} \varepsilon c_3 \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1} \left(\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} y^{j+\frac{\alpha}{p}}(x, m_{i_m}, t) \hbar_m \right)^2 h_\alpha + \frac{1}{4\varepsilon p} c_3 \|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\alpha)}^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{p} \varepsilon c_3 m_1 \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1} h_\alpha \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left(y^{(\alpha)} \right)^2(x, m_{i_m}, t) \hbar_m + \frac{c_3}{4\varepsilon p} \|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\alpha)}^2 = \\ &= \frac{c_3}{p} \varepsilon m_1 \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha, m)}^2 + \frac{c_3}{4\varepsilon p} \|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\alpha)}^2. \end{aligned}$$

Аналогично оценивается последнее слагаемое выражения (12). Здесь мы считаем, что значение искомой функции на нижнем слое $y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}(x, m, t)$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$ ограничено в норме $L_2(\alpha)$, то есть ограничено значение плотности вероятности на слое $j + \frac{\alpha-1}{p}$ [1].

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{p} \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}(x, m - m_{i_m}, t) \beta_1(m, m - m_{i_m}) y^{j+\frac{\alpha}{p}}(x, m_{i_m}, t) \hbar_m, y^{(\alpha)} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{p} \left\| \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}(x, m - m_{i_m}, t) \beta_1(m, m - m_{i_m}) y^{j+\frac{\alpha}{p}}(x, m_{i_m}, t) \hbar_m \right\|_{L_2(\alpha)} \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)} \leq \\ &\leq \frac{1}{p} \varepsilon \left\| \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}(x, m - m_{i_m}, t) \beta_1(m, m - m_{i_m}) y^{j+\frac{\alpha}{p}}(x, m_{i_m}, t) \hbar_m \right\|_{L_2(\alpha)}^2 + \frac{1}{4\varepsilon p} \|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\alpha)}^2 = \\ &= \frac{1}{p} \varepsilon \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1} \left(\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}(x, m - m_{i_m}, t) \beta_1(m, m - m_{i_m}) y^{j+\frac{\alpha}{p}}(x, m_{i_m}, t) \hbar_m \right)^2 h_\alpha + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{4\varepsilon p} \|y^{(j+\frac{\alpha}{p})}\|_{L_2(\alpha)}^2 \leq \\
 & \leq \frac{1}{p} \varepsilon \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1} h_\alpha \left(\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left(y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}(x, m-m_{i_m}, t) \beta_1(m, m-m_{i_m}) \right)^2 \hbar_m \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left(y^{j+\frac{\alpha}{p}} \right)^2 \hbar_m \right) \leq \\
 & \leq \frac{1}{p} \varepsilon M_1 \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1} h_\alpha \left(\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left(y^{j+\frac{\alpha}{p}} \right)^2 \hbar_m \right) + \frac{1}{4\varepsilon p} \|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\alpha)}^2 = \\
 & = \frac{1}{p} \varepsilon M_1 \|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\alpha, m)}^2 + \frac{1}{4\varepsilon p} \|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\alpha)}^2.
 \end{aligned}$$

$$(\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}) \leq \frac{1}{2} \|\varphi^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 + \frac{1}{2} \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2.$$

Подставляя полученные оценки в тождество (11), находим

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} (\|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2)_{\bar{t}} + \left(\left(1 - 0.5 h_\alpha \frac{|r_\alpha|}{k_\alpha} \right) a_\alpha, y_{\bar{x}_\alpha}^2 \right)_\alpha \leq \frac{1}{2} \|\varphi^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 + c(\varepsilon) \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 + \\
 + 0.5 h_\alpha \varepsilon \left(c_4 + \frac{2c_1 c_2}{c_0} \right) \|y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 + \varepsilon c_3 \frac{m_1}{p} \|y^{(\alpha)}\|_{L_\alpha(\alpha, m)}^2, \quad (13)
 \end{aligned}$$

где $\|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha, m)}^2 = \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1} h_\alpha \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} y^{j+\frac{\alpha}{p}}(x, m_{i_m}, t) \hbar_m$, $m_1 = N(m_1) \hbar_m$.

Пользуясь разностным аналогом теоремы вложения [8], при $\varepsilon = \frac{c_0}{2c_5}$, $c_5 = c_4 + \frac{2c_1 c_2}{c_0}$, $h_\alpha \leq \frac{k_\alpha}{|r_\alpha|}$ перепишем (13) иначе:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\alpha)}^2 + \frac{c_0}{2} \tau \|y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 \leq \frac{\tau}{2} \|\varphi^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 + c(\varepsilon) \tau \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 + \\
 + \varepsilon \tau \frac{l_\alpha^2 m_1}{4p} \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 \hbar_m + \frac{1}{2} \|y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}\|_{L_2(\alpha)}^2. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Просуммируем (14) по $i_\beta \neq i_\alpha$, $\beta = 1, 2, \dots, p$. Тогда получим

$$\begin{aligned}
 \|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + c_0 \tau \|y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \leq \tau \|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + c(\varepsilon) \tau \|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \\
 + \varepsilon \frac{l_\alpha^2 m_1}{2p} \tau \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m + \|y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}\|_{L_2(\omega_h)}^2. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Просуммируем (15) по i_m от 0 до $N(m_1)$:

$$\begin{aligned} \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m + c_0 \tau \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|y_{\bar{x}_\alpha}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m &\leq \tau \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m + \\ &+ c(\varepsilon) \tau \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m + \varepsilon \frac{l_\alpha^2 m_1^2}{2p} \tau \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|y_{\bar{x}_\alpha}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m + \\ &+ \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m, \quad m_1 = N(m_1) \hbar_m. \quad (16) \end{aligned}$$

При $\varepsilon \leq \frac{c_0 p}{l_\alpha^2 m_1^2}$ неравенство (16) принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m + \frac{c_0}{2} \tau \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m &\leq \tau \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m + \\ &+ c(\varepsilon) \tau \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m + \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m. \quad (17) \end{aligned}$$

Просуммируем (17) сначала по $\alpha = 1, 2, \dots, p$:

$$\begin{aligned} \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|y^{j+1}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m + \frac{c_0}{2} \sum_{\alpha=1}^p \tau \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m &\leq \sum_{\alpha=1}^p \tau \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m + \\ &+ c(\varepsilon) \sum_{\alpha=1}^p \tau \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m + \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|y^j\|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m, \end{aligned}$$

затем по j' от 0 до j :

$$\begin{aligned} \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|y^{j+1}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m + \frac{c_0}{2} \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|y_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m &\leq \\ &\leq \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|\varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m + c(\varepsilon) \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m + \\ &+ \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|y^0\|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m. \quad (18) \end{aligned}$$

Из (18) имеем

$$\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|y^{j+1}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m \leq c(\varepsilon) \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m + F^j, \quad (19)$$

где $F^j = \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|\varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m + \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|y^0\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m$.

С помощью неравенства (19) на основании леммы 4 из [10, с. 171] из неравенства (18) получим априорную оценку

$$\begin{aligned} & \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|y^{j+1}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|y_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m \leq \\ & \leq M(t) \left[\sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|\varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m + \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|u_0(x, m)\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Из оценки (20) следует

Теорема 1. Локально-одномерная схема (7)–(8) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи (7)–(8) при любых h_α , $\alpha = 1, 2, \dots, p$ и $\tau \leq \tau_0$ справедлива оценка (20).

5. Сходимость локально-одномерной схемы. По аналогии с [8, с. 528] представим решение задачи (9)–(10) в виде суммы $z_{(\alpha)} = v_{(\alpha)} + \eta_{(\alpha)}$, $z_{(\alpha)} = z^{j+\frac{\alpha}{p}}$, где $\eta_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{\eta_{(\alpha)} - \eta_{(\alpha-1)}}{\tau} = \overset{\circ}{\Psi}_\alpha, \quad x \in \omega_{h_\alpha} + \gamma_{h,\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (21)$$

$$\eta(x, 0) = 0.$$

Из (21) следует $\eta^{j+1} = \eta_{(p)} = \eta^j + \tau \left(\overset{\circ}{\Psi}_1 + \overset{\circ}{\Psi}_2 + \dots + \overset{\circ}{\Psi}_p \right) = \eta^j = \dots = \eta^0 = 0$.

Для $\eta_{(\alpha)} = \tau \left(\overset{\circ}{\Psi}_1 + \overset{\circ}{\Psi}_2 + \dots + \overset{\circ}{\Psi}_\alpha \right) = -\tau \left(\overset{\circ}{\Psi}_{\alpha+1} + \dots + \overset{\circ}{\Psi}_p \right) = O(\tau)$.

Функция $v_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{v_{(\alpha)} - v_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda_\alpha v_{(\alpha)} + \tilde{\Psi}_\alpha, \quad x \in \omega_h, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (22)$$

$$v_{(\alpha)} = -\eta_{(\alpha)}, \quad x_\alpha \in \gamma_{h,\alpha}, \quad v_{(\alpha)}(x, 0) = 0, \quad \tilde{\Psi}_\alpha = \Psi_\alpha^* + \Lambda_\alpha \eta_{(\alpha)}. \quad (23)$$

Решение задачи (22) оценим с помощью теоремы 1. Так как $\eta^j = 0$, $\eta_\alpha = O(\tau)$, $\|z^j\| \leq \|v^j\|$, то из оценки (20) следует

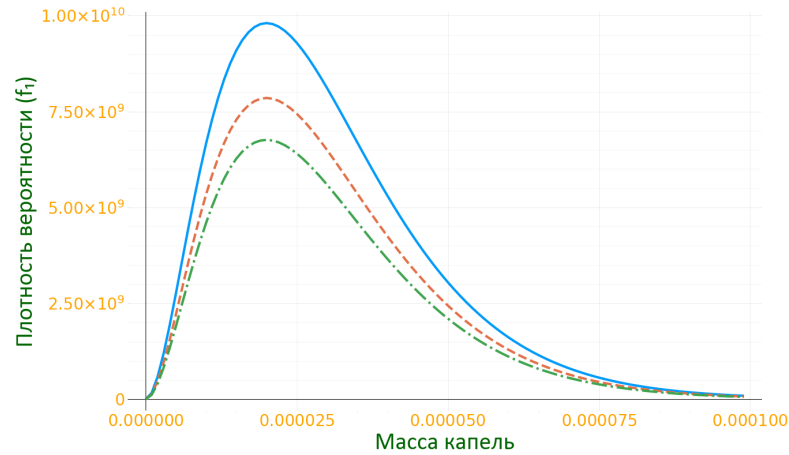
Теорема 2. Пусть задача (1)–(2) имеет единственное непрерывное в \bar{Q}_T решение $u(x, m, t)$ и существуют непрерывные в Q_T производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2 \partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad \alpha \neq \beta,$$

тогда локально-одномерная схема (7)–(8) сходится со скоростью $O(|h|^2 + \tau)$, так что

$$\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_1 \leq M(|h|^2 + \tau), \quad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_p^2.$$

$$\|y^{j+1}\|_1^2 = \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|y^{j+1}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m.$$



Фиг. 1. Функция распределения по массам капель: без учета дробления и замерзания (сплошная линия), с учетом дробления и замерзания (штриховая линия) и с учетом всех микрофизических процессов (штриховая линия с точкой).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ашабоков Б.А., Шаповалов А.В. Конвективные облака: численные модели и результаты моделирования в естественных условиях и при активном воздействии. Нальчик: издательство КБНЦ РАН, 2008. 252 с.
2. Коган Е.Л., Мазин И.П., Сергеев Б.Н., Хворостиков В.Н. Численное моделирование облаков. М.: Гидрометеиздат, 1984. 178 с.
3. Berry E.X. Cloud Droplet Growth by Collection // J. Atmos. Sci., 1967, vol. 24, pp. 688-701.
4. Berry E.X., Reinhardt R.L. An Analysis of Cloud Drop Growth by Collection: Part 2. Single initial Distributions // J. Atmos. Sci., 1974, vol. 31, pp. 1825-1837.
5. Чудновский Л.Ф. Теплофизика почвы. М.: Наука, 1976. 353 с.
6. Кожанов А.И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 10, № 6. С. 763-774.
7. Tzivion S., Feingold G., Levin Z. An Efficient Numerical Solution to the Stochastic Collection Equation // J. Atmos. Sci., 1987, vol. 44, pp. 3139-3149.
8. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
9. Андреев В.Б. О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1968. Т. 8.

10. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 480 с.

ABSTRACT

A locally one-dimensional difference scheme for a general parabolic equation in a p -dimensional parallelepiped is considered. To describe microphysical processes in convective clouds, non-local (nonlinear) integral sources of a special type are included in the equation under consideration. An a priori estimate for the solution of a locally one-dimensional scheme is obtained and its convergence is proved.

Keywords: boundary value problem, locally one-dimensional scheme, stability, convergence of the scheme, approximation error.

¹*Institute of Computer Science and Problems of Regional Management of the KBSC RAS, Nalchik*

²*Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik*

E-mail: ashabokov.boris@mail.ru, akkhibiev@gmail.com, lafishhev@yandex.ru

© В.А. Ашабоков¹,
А.Х. Хибиев²,
М.Х. Шхануков-Лафишев², 2021

АННОТАЦИЯ

Рассматривается локально-одномерная разностная схема для параболического уравнения общего вида в p -мерном параллелепипеде. Для описания микрофизических процессов в конвективных облаках в рассматриваемое уравнение включаются нелокальные (нелинейные) интегральные источники специального вида.

Получена априорная оценка для решения локально-одномерной схемы и доказана ее сходимость.

Ключевые слова: краевая задача, локально-одномерная схема, устойчивость, сходимость схемы, погрешность аппроксимации.

¹*Институт информатики и проблем регионального управления КБНЦ РАН, Нальчик*

²*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик*

E-mail: ashabokov.boris@mail.ru, akkhibiev@gmail.com, lafishhev@yandex.ru

© В.А. Ашабоков¹,
А.Х. Хибиев²,
М.Х. Шхануков-Лафишев², 2021