УДК 517.91
DOI: 10.47928/1726-9946-2021-21-4-10-14

Обобщенная краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка с дробной производной

Гадзова Л.Х.

Представлено академиком АМАН А.В. Псху

Посвящается 30-летию ИПМА КБНЦ РАН

Введение. Рассмотрим уравнение

$$u''(x) + \lambda D_{0x}^{\alpha} u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

где $\alpha \in (0,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, D_{0x}^{α}– оператор дробного интегро-дифференцирования порядка α в смысле Римана – Лиувилля [1, с. 9] по переменной x, определяемый равенством:

$$D_{0x}^{\alpha} u(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_0^x u(t)(x-t)^{-\alpha-1} dt, & \alpha < 0, \\ u(x), & \alpha = 0, \\ \frac{d^n}{dx^n} D_{0x}^{\alpha-n} u(x), & n-1 < \alpha \le n,\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

В настоящее время наблюдается заметный рост к исследованию дифференциальных уравнений дробного порядка. Обширный обзор литературы по дробному исчислению и его применению можно найти в монографиях [1], [2] – [9].

В работе [10] решена задача Штурма-Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах, частным случаем которого является уравнение (1). В [11] построено решение начальной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами.

В данной работе для уравнения (1) исследуется обобщенная краевая задача (по терминологии Наймарка М.А.) [12, с. 16]. Построено явное представление решения исследуемой задачи, найдено условие однозначной разрешимости и доказана теорема единственности решения. Краевые условия задаются в форме линейных функционалов, что позволяет охватить достаточно широкий класс линейных локальных и нелокальных условий. Ранее, задача для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка в случае, когда одно из условий задано в форме линейного функционала, рассмотрена в [13].

1. Постановка задачи. *Регулярным решением* уравнения (1) назовем функцию $u = u(x)$, такую что $u(x) \in C^2(0,1) \cap C^1[0,1]$ и удовлетворяющую уравнению (1) для всех $x \in (0,1)$.

Задача. *Найти регулярное решение уравнения (1) в интервале* $(0,1)$*, удовлетворяющее условиям*

$$\ell_0[u] = u_0, \tag{2}$$

$$\ell_1[u] = u_1, \tag{3}$$

где u_0, u_1*— заданные действительные числа,* $\ell_0[u]$, $\ell_1[u]$*— линейные ограниченные функционалы в* $C^1[0,1]$.

2. Формулировка результатов. Введем следующие обозначения

$$W_\mu(x) = \begin{cases} x^{\mu-1}E_{2-\alpha,\mu}(-\lambda x^{2-\alpha}), & \text{если} \quad x > 0 \\ 0, & \text{если} \quad x \le 0 \end{cases}, \tag{4}$$

$E_{\delta,\mu}(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\delta j+\mu)}$ – функция Миттаг–Леффлера (см, например, [5, 9]),

$$\overline{\ell} = \begin{pmatrix} \ell_0 \\ \ell_1 \end{pmatrix}, \quad \overline{W}(x) = (W_2(x), W_1(x)),$$

$$A = \overline{\ell}\,[\overline{W}(x)] = \begin{pmatrix} \ell_0[W_2(x)] & \ell_0[W_1(x)] \\ \ell_1[W_2(x)] & \ell_1[W_1(x)] \end{pmatrix}, \ H = A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \ell_1[W_1(x)] & -\ell_0[W_1(x)] \\ -\ell_1[W_2(x)] & \ell_0[W_2(x)] \end{pmatrix}.$$

Следует обратить внимание, что здесь и далее функционал ℓ применяется к функции зависящей от x.

Теорема. *Пусть* $f(x) \in C[0,1] \cap L[0,1]$ *и выполнено неравенство*

$$\det A = \ell_0[W_2(x)]\ell_1[W_1(x)] - \ell_0[W_1(x)]\ell_1[W_2(x)] \ne 0. \tag{5}$$

Тогда решение задачи существует, единственно и оно имеет вид

$$u(x) = \int\limits_0^1 f(t)G(x,t)dt + \overline{W}(x)H\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где

$$G(x,t) = \left[1 - \overline{W}(x)H\overline{\ell}\right]W_2(x-t).$$

3. Доказательство теоремы. Пусть $u(x)$– регулярное решение задачи (1)–(3). Для нахождения решения задачи (1)–(3) воспользуемся решением задачи Коши для уравнения (1) (см. например [11]). Используя обозначения, перепишем общее решение:

$$u(x) = \int\limits_0^1 f(t)W_2(x-t)dt + \overline{W}(x)\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Нетрудно показать, ([14, с. 222], [15, с. 126], [16, с. 39, с. 93], [17]), что для всякого линейного ограниченного функционала ℓ в пространстве $C^1[0,1]$, имеет место равенство

$$\ell\left[\int\limits_0^1 K(x,t)dt\right] = \int\limits_0^1 \ell[K(x,t)]dt, \tag{8}$$

где $K(x,t) \in C([0,1]\times[0,1])$ и $\frac{\partial}{\partial x}K(x,t) \in C([0,1]\times[0,1])$.

Далее, учитывая введенные обозначения и равенство (8), удовлетворим (7) краевым условиям

$$\int\limits_0^1 f(t)\overline{\ell}[W_2(x-t)]dt + A\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = H\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} - \int\limits_0^1 f(t)H\overline{\ell}[W_2(x-t)]dt.$$

После элементарных преобразований, подставляя найденное значение в (7), получаем представление решения задачи (1)–(3) в виде (6). Отсюда, в частности, следует единственность решения.

Проверим теперь выполнение краевых условий (2), (3). В силу свойств линейных функционалов ([14, с. 222], [15, с. 126], [16, с. 39, с. 93], [17]), учитывая обозначения получаем, что

$$\overline{\ell}\left[\int\limits_0^1 f(t)G(x,t)dt + \overline{W}(x)H\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}\right] = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \overline{\ell}\left[\int\limits_0^1 f(t)G(x,t)dt\right] \quad \text{и} \quad I_2 = \overline{\ell}\left[\overline{W}(x)H\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}\right].$$

С учетом (8), имеем

$$I_1 = \int\limits_0^1 \overline{\ell}\left[G(x,t)\right]f(t)dt = \int\limits_0^1 \left(\overline{\ell}[W_2(x,t)] - \overline{\ell}[\overline{W}(x)]H\overline{\ell}[W_2(x,t)]\right)f(t)dt.$$

В силу равенства $\overline{\ell}[\overline{W}(x)] = H^{-1}$, получаем, что $I_1 = 0$. Аналогично, для I_2 имеем

$$I_2 = \overline{\ell}[\overline{W}(x)]H\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = H^{-1}H\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

Для завершения доказательства теоремы необходимо показать, что построенное решение является регулярным решением уравнения (1). В силу формулы дифференцирования функции Миттаг-Леффлера, имеем

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda D_{0x}^{\alpha}\right)\overline{W}(x) = 0.$$

Поэтому, в силу (4) и (7), остается показать, что

$$\int\limits_0^1 W_2(x-t)f(t)dt \in C^2(0,1)\cap C^1[0,1] \quad \text{и} \quad \left(\frac{d^2}{dx^2}+\lambda D_{0x}^{\alpha}\right)\int\limits_0^x W_2(x-t)f(t)dt = f(x).$$

Оба соотношения следуют из равенств

$$\frac{d}{dx}\int\limits_0^x W_2(x-t)f(t)dt = \int\limits_0^x W_1(x-t)f(t)dt, \quad \frac{d}{dx}W_1(x-t) = -\lambda W_{2-\alpha}(x-t)$$

и

$$\frac{d^2}{dx^2}\int\limits_0^x W_2(x-t)f(t)dt = f(x) - \lambda\int\limits_0^x W_{2-\alpha}(x-t)f(t)dt.$$

Замечание. Покажем, что если условие (5) нарушается, то есть

$$\ell_0[W_2(x)]\ell_1[W_1(x)] - \ell_0[W_1(x)]\ell_1[W_2(x)] = 0, \tag{9}$$

то решение однородной задачи не единственно.
Рассмотрим функцию

$$\widetilde{u}(x) = (k_1(x), k_2(x))\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

где C_1 и C_2- произвольные постоянные,

$$k_1(x) = \overline{W}(x)\begin{pmatrix} \ell_0[W_1(x)] \\ -\ell_0[W_2(x)] \end{pmatrix}, \quad k_2(x) = \overline{W}(x)\begin{pmatrix} -\ell_1[W_1(x)] \\ \ell_1[W_2(x)] \end{pmatrix}.$$

Тогда из (9) следует, что функция $\widetilde{u}(x)$ является решением однородной задачи

$$u''(x) + \lambda D_{0x}^{\alpha}u(x) = 0, \quad \ell_0[\widetilde{u}] = 0, \quad \ell_1[\widetilde{u}] = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.
3. *Oldham K. B., Spanier J.* The fractional calculus. N.-Y.; L. Acad. press, 1974. 234 p.
4. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
5. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and applications of fractional differential equations // North-Holland Math. Stud., Elsevier, Amsterdam, 2006, vol. 204. 540 p.
6. *Bagley R.L., Torvik P.J.* Fractional calculus in the transient analysis of viscoelastically damped structures // AIAA Journal, 1985, vol. 23, no. 6, pp. 918-925.
7. *Hilfer R.* Applications of fractional calculus in physics. World Scientific, River Edge, NJ, USA, 2000. 472 с.

8. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. Ульяновск: Изд.«Артишок», 2008. 512 с.
9. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
10. *Нахушев А.М.* Задача Штурма-Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах // ДАН СССР. 1977. Т. 234, № 2. С. 308-311.
11. *Псху А.В.* Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Мат. сборник. 2011. Т. 202, № 4. С. 111-122.
12. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
13. *Гадзова Л.Х.* Задача для обыкновенного дифференциального уравнения с общим краевым условием // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2021. Т. 21, № 2. С. 9-14.
14. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
15. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.
16. *Кириллов А.А., Гвишиани А.Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1979. 400 с.
17. *Иродова И.П.* Линейные функционалы и операторы в курсе функционального анализа: Учебное пособие. Ярославль: Яросл. гос. ун-т. им. П.Г. Демидова, 2010. 120 с.

ABSTRACT

A generalized boundary value problem for a second-order differential equation with a fractional derivative is solved. An explicit representation of the solution of the problem under study is constructed, a condition for unique solvability is found, and a uniqueness theorem for the solution is proved.

Keywords: fractional order equations, functional, Riemann – Liouville operator, Mittag-Leffler function.

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik
E-mail: macaneeva@mail.ru

АННОТАЦИЯ

Решена обобщенная краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка с дробной производной. Построено явное представление решения исследуемой задачи, найдено условие однозначной разрешимости и доказана теорема единственности решения.

Ключевые слова: уравнения дробного порядка, функционал, оператор Римана – Лиувилля, функция Миттаг-Леффлера.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик
E-mail: macaneeva@mail.ru