ГЕОФИЗИКА

УДК 551.509+551.576

Статистическая оценка корреляционных зависимостей между параметрами градовых облаков при проведении воздействия на них

Калов Р.Х. – академик АМАН, Калов Х.М. – академик АМАН

1. Введение

В настоящее время существует несколько подходов к оценке эффективности активных воздействий на градовые процессы: математико-статистические методы прогнозирования временных рядов [1, 2], эмпирические методы и различные варианты статистических оценок [3]. Одна из таких оценок применена в настоящей работе [4].

Предполагается, что искусственное вмешательство в процесс образования града в облаке может нарушить существующие корреляционные связи между различными характеристиками облака, в различной степени реагирующими на воздействие. При таком подходе можно использовать самые различные комбинации измеряемых параметров независимо от того, существуют ли между ними устойчивые корреляционные зависимости или нет в естественных условиях.

2. Оценка коэффициента взаимной корреляции и построение доверительных интервалов

Для анализа используются современные методы математической статистики. Оценка коэффициента взаимной корреляции [5]

$$r_{xy} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 \sum\limits_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2)^{1/2}}, \tag{1}$$

$$\bar{x} = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right) \Big/ N, \quad \bar{y} = \left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right) \Big/ N,$$

используется в качестве оценки меры линейной зависимости только в том случае, когда можно предположить, что наблюдения $(x_1,...,x_N)$ и $(y_1,...,y_N)$ являются выборками из нормальных совокупностей случайных величин ξ и η с параметрами $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ и $\mathrm{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$, соответственно. В крайнем случае, можно предположить, что распределения ξ и η совпадают с нормальными на отрезках $-\mu_1 - 3\sigma_1 \leq t \leq \mu_1 + 3\sigma_2$ и $-\mu_2 - 3\sigma_2 \leq t \leq \mu_2 + 3\sigma_2$, соответственно. Оценка коэффициента корреляции как меры зависимости между случайными величинами используется, например, при исследовании количества информации в одном случайном объекте относительно другого [6, 7]. При этом требуется, чтобы ковариационная матрица

$$S_{ij} = E(\xi_1 - E\xi)(\xi j - E\xi_j), \quad 1 \leq i, \quad j \leq N_1 + N_2,$$

$$\xi_i = (\xi_1, ..., \xi_{N_1+N_2}) = (\xi_1, ..., \xi_{N_1}, \eta_1, ..., \eta_{N_2})$$

имела отличный от нуля определитель. Этот пример показывает важность изучения корреляций.

Оценки коэффициентов корреляции были получены отдельно в случаях: 1) если на контрольной территории выпал град; 2) если на контрольной территории не выпал град; 3) если на защищаемой территории выпал град; 4) если на защищаемой территории не выпал град. Для каждой из территорий, контрольной и защищаемой, выясним, для каких характеристик существуют значимые различия, между оценками коэффициентов корреляций при выпадении или отсутствии града. Для этого рассмотрим преобразование Р. Фишера:

$$Z = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + r_{xy}}{1 - r_{xy}} \right). \tag{2}$$

Распределение случайной величины Z хорошо аппроксимируется нормальным распределением с не зависящей от коэффициента корреляции дисперсией

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{N - 3}. \tag{3}$$

На основании преобразования Фишера находим доверительные границы на уровне значимости α для оценок коэффициентов корреляции [6]. При α $=$ 0,05 доверительные границы для Z равны

$$Z_1 = Z - 1,96\ \sigma_z, \quad Z_2 = Z + 1,96\ \sigma_z, \tag{4}$$

где Z и σ_z найдены по формулам (2) и (3) для полученной оценки корреляции r_{xy}. Подставляя в (2) из (4) Z_1 и Z_2 и решая уравнение (2) относительно r_{xy}, находим нижнюю и верхнюю границы

$$r_1 = \frac{e^{2z_1} - 1}{e^{2z_1} + 1}, \qquad r_2 = \frac{e^{2z_2} - 1}{e^{2z_2} + 1}$$

оценки коэффициента корреляции на уровне значимости $\alpha = 0,05$.

3. Статистический анализ экспериментальных данных

Исследование проводится на основании экспериментальных данных для многоячейковых, одноячейковых и суперячейковых градовых процессов. Рассматриваются корреляции между максимальной радиолокационной отражаемостью на длине волны λ =10 см η_{10}^{i} (см$^{-1}$), высотой верхней границы зоны повышенной отражаемости $H_{\Delta\eta}^{i}$ (км) и температурой $t_{H\Delta n}$(°C) на уровне верхней границы зоны повышенного радиоэха, высотой H_9^i (км) зоны с η_{10}^{i}= 10^{-9} см$^{-1}$. При i = 1 рассматриваются характеристики до начала, воздействия, а i=2 соответствует характеристикам после окончания процесса воздействия. Кроме того, в исследование включены данные о максимальной скорости восходящего потока W$_{max}$ (м·с$^{-1}$) и температуре $t_{W_{\max}}$ на высоте, где скорость восходящего потока достигает W$_{max}$, высоте уровня нулевой изотермы H_0 (км), о высоте уровня конденсации Н$_{\text{конд}}$ (км), и температуре на уровне конденсации $t_{\text{конд}}$ (°C), о высоте уровня, конвекции Н$_{\text{конв}}$ (км) и температуре на уровне конвекции t$_{\text{конв}}$ (°C). Эти обозначения используются в приведенных ниже таблицах.

Экспериментальные данные для отдельных характеристик содержат пропуски наблюдений, поэтому длины выборок N, по которым оцениваются коэффициенты корреляции, для каждой пары характеристик различны. Если число наблюдений оказалось меньше 11, коэффициент корреляции не оценивался вообще.

Преобразование [6] позволяет сравнить, значимо ли различие двух оценок коэффициентов корреляции в предположении, что они независимы. Это имеет место при разделении выборки, принадлежащей одной территории по признаку, выпадения или отсутствия града. В этом случае находим

$$d = Z_2 - Z_1, \qquad \sigma_z^2 = \sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2.$$

Абсолютная величина |d|/σ_z, как установил Фишер, аппроксимируется нормальным распределением. Уровню значимости α соответствует t_α такое, где

$$\alpha = \int\limits_{t_\alpha}^{\infty} f(x)dx,$$

где $f(x)$ – плотность распределения.

Если $|d|/\sigma_z > t_\alpha$, существует различие между оценками $r_{xy}^{(1)}$ и $r_{xy}^{(2)}$ на уровне значимости α. Если $|d|/\sigma_z < t_\alpha$, значимого различия на этом уровне нет.

Для одноячейковых, многоячейковых и суперячейковых процессов результаты сравнения оценок коэффициентов корреляций приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Сравнение оценок коэффициентов корреляции для различных типов процессов по признаку выпадения или отсутствия града на контрольной и защищаемой территориях

Характеристика	Выпал град			Не выпал град			Уровень знач-ти, на котором оценки коэффиц. корреляции различ-ся	Вид территории
	r_{xy}	Доверительный интервал для r_{xy} при $\alpha = 0,05$		r_{xy}	Доверительный интервал для r_{xy} при $\alpha = 0,05$			
		нижняя граница	верхняя граница		нижняя граница	верхняя граница		
	Одноячейковый тип							
$\eta_{10}^{(1)},\eta_{10}^{(2)}$	0,147	-0,087	0,366	0,662	0,494	0,783	0,9996	ЗТ
$t_{W_{\max}},t_{конд}$	-0,355	-0,643	-0,273	0,140	-0,253	0,494	0,9060	ЗТ
$t_{\Delta\eta}^{(2)},H_0$	-0,151	-0,445	0,173	0,302	-0,088	0,612	0,9040	ЗТ
$\eta_{10}^{(1)},\eta_{10}^{(2)}$	0,163	-0,061	0,372	0,708	0,548	0,819	0,9999	КТ
	Многоячейковый тип							
$H_0,t_{конв}$	0,378	0,176	0,550	0,068	-0,214	0,340	0,9180	ЗТ
$H_{конв}, t_{\Delta\eta}^{(1)}$	0,076	-0,151	0,295	-0,272	-0,526	0,027	0,9240	ЗТ
$H_{в}^{(1)},t_{\Delta\eta}^{(1)}$	-0,465	-0,639	-0,245	-0,128	-0,426	0,195	0,9120	ЗТ
$H_{конв}, H_{\Delta\eta}^{(1)}$	-0,062	-0,228	0,170	0,263	-0,033	0,517	0,9000	ЗТ
$t_{конв}, H_{конв}$	-0,90	-0,325	0,150	-0,377	-0,568	-0,149	0,9080	КТ
$W_{\max}, t_{\Delta\eta}^{(2)}$	0,111	-0,195	0,398	-0,297	-0,573	0,041	0,9080	ЗТ
$t_{W_{\max}}, t_{\Delta\eta}^{(2)}$	-0,576	-0,565	-0,272	0,211	-0,210	0,567	0,9940	ЗТ
$t_{W_{\max}}, H_{\Delta\eta}^{(2)}$	0,504	0,188	0,725	-0,211	-0,566	0,210	0,9880	ЗТ
$t_{W_{\max}}, H_{в}^{(2)}$	0,341	-0,003	0,612	-0,162	-0,517	0,241	0,9200	ЗТ
$t_{W_{\max}}, t_{H_в}^{(2)}$	-0,320	-0,597	0,027	0,213	-0,190	0,554	0,9360	ЗТ
$H_9^{(1)}, t_{H_в}$	-0,484	-0,716	-0,157	0,047	-0,382	0,460	0,9280	ЗТ
$t_{W_{\max}}, t_{\Delta\eta}^{(2)}$	-0,515	-0,765	-0,131	0,000	-0,343	0,343	0,9340	КТ
	Суперячейковый тип							
$\eta_{10}^{(1)},\eta_{10}^{(2)}$	0,830	0,535	0,945	0,397	0,125	0,615	0,9520	ЗТ
$\eta_{10}^{(1)},\eta_{10}^{(2)}$	0,817	0,587	0,925	0,381	0,083	0,616	0,9820	КТ

Из этой таблицы видно, что для одноячейковых и суперячейковых процессов оценки коэффициентов корреляции между $\eta_{10}^{(1)}$ и $\eta_{10}^{(2)}$ по признаку выпадения града различны на достаточно высоком уровне значимости $\alpha = 0,05a$. Это свойство имеет место, и для контрольной, и для защищаемой территорий. Для многоячейковых процессов различий между коэффициентами корреляции $\eta_{10}^{(1)}$ и $\eta_{10}^{(2)}$ на уровне значимости $\alpha = 0,01$ не было обнаружено ни для контрольной, ни для защищаемой территорий.

Из табл. 1 видно, что для многоячейковых процессов на наиболее высоком уровне значимости по признаку выпадения града на защищаемой территории отличаются корреляции для двух пар характеристик $t_{W_{\max}}$, $t_{\Delta\eta}^{(2)}$ и $t_{W_{\max}}$, $H_{\Delta\eta}^{(2)}$.

В табл. 1 приведены также доверительные границы на уровне значимости $\alpha = 0,05$ для тех оценок корреляции, между которыми есть различие по признаку выпадения града на уровне значимости, меньшем 0,1.

Проверим в зависимости от длины выборки, при каких значениях оценок корреляции между парой характеристик, эти характеристики можно считать выборками из двух независимых совокупностей. Случайная величина

$$t = \frac{r_{xy}}{\sqrt{1 - r_{xy}^2}}\sqrt{N-2} \tag{5}$$

подчиняется распределению Стьюдента с $N - 2$ степенями свободы.

В формуле (5) r_{xy} – оценка коэффициента корреляции по выборке длины N. Зная границы для t, соответствующие уровню значимости α по формуле (5) получим границы доверительного интервала для оценки τ_{xy}. Если в результате практических вычислений получено такое значение r_{xy}, абсолютная величина которого превосходит границу r_a, полученную из (5) при $t = t_\alpha$, то случайные величины считаются зависимыми. Чтобы судить о том, какие коэффициенты корреляций на уровне значимости $\alpha = 0,05$ определяют выборки из независимых совокупностей, приведем в табл. 2 двусторонние доверительные границы для выборочного коэффициента корреляции.

Из табл. 2 видно, что в случае одноячейковых процессов $\eta_{10}^{(1)}$ и $\eta_{10}^{(2)}$ являются выборками из независимых совокупностей, если выпал град. Если град не выпал, то $\eta_{10}^{(1)}$ и $\eta_{10}^{(2)}$ не являются выборками из независимых совокупностей на уровне значимости $\alpha = 0,05$. Для суперячейковых процессов на этом же уровне значимости $\eta_{10}^{(1)}$ и $\eta_{10}^{(2)}$ не могут быть выборками из независимых совокупностей вне зависимости от выпадения или отсутствия града и для контрольной, и для защищаемой территорий.

Одноячейковые процессы на уровне значимости $\alpha = 0,10$ имеют различные коэффициенты корреляции между парами характеристик $t_{W_{\max}}$, $t_{\text{конд}}$ и $t^{(2)}_{\Delta\eta}$, H_0 в зависимости от выпадения или отсутствия града. Все соответствующие пары характеристик являются выборками из независимых совокупностей на уровне значимости $\alpha = 0,05$ независимо от того, выпал град или нет. Этот вывод сделан на основании табл. 2.

Таблица 2 – Двусторонние доверительные границы для выборочного коэффициента корреляции на уровне значимости $\alpha = 0,005$

Характеристика	Выпал град			Не выпал град		
	r_{xy}	$t_{\text{кр}}$	Н	r_{xy}	$t_{\text{кр}}$	Н
$\eta^{(1)}_{10},\eta^{(2)}_{10}$	0,147	0,237	59	0,662	0,255	59
$t_{W_{\max}}$, $t_{\text{конд}}$	-0,355	0,395	25	0,140	0,403	24
$t^{(2)}_{\Delta\eta},H_0$	-0,151	0,330	36	0,302	0,403	24
$\eta^{(1)}_{10},\eta^{(2)}_{10}$	0,163	0,226	75	0,708	0,265	53
H_0, $t_{\text{конв}}$	0,378	0,220	79	0,068	0,270	47
$H_{\text{конв}}$, $t^{(1)}_{\Delta\eta}$	0,076	0,218	41	-0,272	0,308	41
$H^{(1)}_{\text{в}},t^{(1)}_{\Delta\eta}$	-0,465	0,253	60	-0,128	0,330	36
$H_{\text{конв}}$, $H^{(1)}_{\Delta\eta}$	0,062	0,234	70	0,263	0,312	42
$t_{\text{конв}}$, $H_{\text{конв}}$	-0,090	0,247	63	-0,377	0,247	63
$W_{\max}$, $t^{(2)}_{\Delta\eta}$	0,111	0,312	40	-0,297	0,349	32
$t_{W_{\max}},t^{(2)}_{\Delta\eta}$	-0,567	0,367	29	0,211	0,433	21
$t_{W_{\max}}$, $H^{(2)}_{\Delta\eta}$	0,504	0,367	29	-0,211	0,433	21
$t_{W_{\max}}$, $H^{(2)}_{\text{в}}$	0,341	0,362	30	-0,162	0,414	23
$t_{W_{\max}}$, $t^{(2)}_{H_B}$	-0,320	0,362	30	0,213	0,414	23
$H^{(1)}_{9}$, t_{H_B}	-0,484	0,325	28	0,047	0,456	19
$t_{W_{\max}}$, $t^{(2)}_{\Delta\eta}$	-0,515	0,444	20	0,000	0,362	30
$\eta^{(1)}_{10},\eta^{(2)}_{10}$	0,830	0,602	11	0,397	0,312	44
$\eta^{(1)}_{10},\eta^{(2)}_{10}$	0,817	0,482	17	0,381	0,291	38

Многоячейковые процессы характеризуются, на уровнях значимости не меньших чем 0,10, многими различными парами характеристик, приведенными в табл. 2. Однако различий между характеристиками максимальной радиолокационной отражаемости, что присуще именно многоячейковым процессам, нет. Это означает, что на уровне значимости не меньшем чем 0,10 максимальные радиолокационные отражаемости или не изменяют своего значения в процессе воздействия, или быстро возвращаются к прежнему значению. Из табл. 2 видно, что для многоячейковых процессов большинство пар характеристик изменяет свой коэффициент корреляции в зависимости от выпадения града именно на защищаемой территории. С вероятностью 0,988 коэффициенты корреляции по признаку выпадения града для пары характеристик $t_{W_{\max}}$ и $H^{(2)}_{\Delta\eta}$ различны. При выпадении града эти характеристики не являются выборками из независимых совокупностей, а если град, не выпал, $t_{W_{\max}}$ и $H^{(2)}_{\Delta\eta}$ и есть выборки из двух независимых совокупностей. Для некоторых пар характеристик многоячейковых процессов все происходит иначе. На уровне значимости $\alpha = 0,05$ $H_{конв}$ и $H^{(1)}_{\Delta\eta}$ являются выборками из независимых совокупностей, если выпал град, и не являются в противном случае. Противоположная ситуация имеет место для пары $H^{(1)}_{9}$ и t_{H_B}. Если нет града, на уровне значимости $\alpha = 0,05$ выборки независимы, если град выпал, выборки становятся зависимыми.

4. Выводы

Каждый грозо-градовый процесс характеризуется определенными корреляционными зависимостями облачных параметров и окружающей атмосферы; некоторые корреляционные зависимости изменяются под влиянием искусственного воздействия, другие сохраняют свое прежнее значение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калов Х.М., Калов Р.Х.* Физические основы, методы и средства активных воздействий на грозо-градовые облака и туманы. Нальчик: ООО «Полиграфсервис и Т». 2010. 220 с.
2. *Гайворонский И.И., Зацепина Л.П., Зимин Б.И., Серегин Ю.А.* Воздействие на конвективные облака порошкообразными реагентами // Труды V Всесоюзного метеорологического съезда. Т. 4. Л.: Гидрометеоиздат. 1972. С. 79-86.
3. *Калов Х.М.* Оседание искусственного облака полидисперсных частиц в атмосфере // Труды ВГИ. 1974. Вып. 28. С. 169-175.
4. *Калов Х.М., Хоргуани В.Г.* О возможности создания нисходящего потока в атмосфере высококонцентрированной системой грубодисперсных аэрозольных частиц // Материалы Международной конференции по активным воздействиям на метеорологические процессы. Москва. 1973. С. 51-52.

5. *Хоргуани В.Г., Калов Х.М.* О падении высококонцентрированной системы грубодисперсных аэрозольных частиц в атмосфере // Изв. АН СССР. ФАО. 1975. Т. 11, № 3. С. 278-283.
6. *Khorguani V.G., Kalov Kh.M.* On possibility of generating downdrafts by introducing a high concentration of coarse aerosol particles in the atmosphere.- Proc. WMO/JAMAP Sci. Conf. On Weath. Modification., Geneva. 1974. P. 301-308.
7. *Фукс Н.А.* Механика аэрозолей // Изд. АН СССР. М. 1955. С. 351.

ABSTRACT

Results of researches of correlation dependences between parameters of hail clouds at carrying out active influences on hail processes are considered. Modern methods of mathematical statistics, in particular (1), are used to estimate the coefficient of mutual correlation when exposed to single-cell, multi-cell and super-cell clouds. These calculations show the importance of studying the correlation between the parameters of hail clouds to assess the effectiveness of artificial impacts on clouds.

Keywords: correlation dependences, parameters of hail clouds, cloud seeding, mutual correlation coefficient, confidence interval, Fisher transform, Student distribution.

High-Mountain Geophysical Institute, Nalchik; ruslan_kalov@mail.ru

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются результаты исследований корреляционных зависимостей между параметрами градовых облаков при проведении активных воздействий на градовые процессы. Для оценки коэффициента взаимной корреляции при воздействии на одноячейковые, многоячейковые и суперячейковые облака используются современные методы математической статистики, в частности (1). Приведенные расчеты показывают важность исследования корреляционных зависимостей между параметрами градовых облаков для оценки эффективности искусственных воздействий на облака.

Ключевые слова: корреляционные зависимости, параметры градовых облаков, активные воздействия, коэффициент взаимной корреляции, доверительный интервал, преобразование Фишера, распределение Стьюдента.

ФГБУ Высокогорный геофизический институт, Нальчик; ruslan_kalov@mail.ru