УДК 517.956.6
DOI: 10.47928/1726-9946-2021-21-4-15-17

К вопросу единственности решения аналога задачи Дезина для модельного уравнения параболо-гиперболического типа

Киржинов Р.А.

Представлено академиком АМАН А.В. Псху

Посвящается 30-летию ИПМА КБНЦ РАН

Пусть $\Omega = \{(x,\, y)\colon 0 < x < r,\ -r < y < h\}$ — область евклидовой плоскости точек $(x,\, y)$; $\Omega^- = \Omega \cap \{(x,\, y)\colon y < 0\}$; $r,\, h$ — вещественные положительные числа.

В области Ω для уравнения

$$\begin{cases} u_{xx} - u_y = f, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} = 0, & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $u = u(x,\, y)$ – неизвестная функция, $f = f(x,\, y)$ – заданная функция, исследуется

Задача 1. *Найти решение $u(x,\, y)$ уравнения (1) из класса $C^1\big(\overline{\Omega}\big) \cap C^2_x(\Omega) \cap C^2_y(\Omega^-)$, удовлетворяющее условиям*

$$\lambda_1\, u(x,\, 0) + \lambda_2\, u(x,\, -r) + \lambda_3\, u_y(x,\, 0) + \lambda_4\, u_y(x,\, -r) = g(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant r, \tag{2}$$

$$u(0,\, y) = 0, \quad u(r,\, y) = 0, \qquad -r \leqslant y \leqslant h, \tag{3}$$

где $\lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3,\, \lambda_4$ – постоянные, удовлетворяющее условию $(|\lambda_1| + |\lambda_3|)\,(|\lambda_2| + |\lambda_4|) \neq 0$; $g(x)$ – заданная функция.

Условие (2) есть аналог условия А.А. Дезина [1, п. 1.6] $\gamma_1\,[u(s_1)] + \gamma_2\,[u(s_2)] = 0$, где γ_1 и γ_2 — некоторые линейные операторы, а s_1 и s_2 — различные точки границы. Задача 1 была исследована в [2, гл. 4, п. 4.6] при $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = -1$, $g(x) \equiv 0$ с нелокальными условиями периодичности $u(0,\, y) = u(r,\, y)$, $u_x(0,\, y) = u_x(r,\, y)$ вместо условия (3). Отметим также работы [3–5], посвящённые исследованию задачи А. А. Дезина для различных уравнений эллиптико—гиперболического типа.

Пусть существует решение $u(x,\, y)$ задачи 1. По аналогии с работой [6], рассмотрим функции

$$u_k(y) = \sqrt{\frac{2}{r}} \int\limits_0^r u(x,\, y)\, \sin \mu_k\, x\, dx, \tag{4}$$

где $\mu_k = \frac{\pi\, k}{r}$, $k \in \mathbb{N}$.

С учётом класса, в котором ищется $u(x,\, y)$, уравнения (1), условия (3) и полноты в пространстве $L_2\,[0, r]$ ортонормированной системы функций (см., напр., [7, гл. 11, § 3, п. 1])

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{r}}\, \sin \frac{\pi\, k}{r}\, x \right\}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

из (4) находим

$$u_k(y) = \begin{cases} a_k\, e^{-\mu_k^2 y} - \int\limits_0^y f_k(\eta)\, e^{-\mu_k^2 (y-\eta)}\, d\eta, & y > 0, \\ a_k\,(\cos\mu_k y - \mu_k \sin\mu_k y) - f_k(0)\dfrac{\sin\mu_k y}{\mu_k}, & y < 0, \end{cases} \tag{6}$$

где a_k — произвольные постоянные,

$$f_k(y) = \sqrt{\frac{2}{r}} \int\limits_0^r f(x,\, y)\, \sin\mu_k\, x\, dx. \tag{7}$$

Из (4) и (6), пользуясь условием (2), получаем:

$$\left[\lambda_1 + (-1)^k\, \lambda_2 - \mu_k^2\, \lambda_3 - (-1)^k\, \mu_k^2\, \lambda_4\right] a_k = \left[\lambda_3 + (-1)^k\, \lambda_4\right] f_k(0) + g_k,$$

где $g_k = \sqrt{\frac{2}{r}} \int\limits_0^r g(x)\, \sin\mu_k\, x\, dx$.

Пусть

$$\delta_k = \lambda_1 + (-1)^k\, \lambda_2 - \mu_k^2\, \lambda_3 - (-1)^k\, \mu_k^2\, \lambda_4 \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

тогда находим

$$a_k = \frac{\left[\lambda_3 + (-1)^k\, \lambda_4\right] f_k(0) + g_k}{\delta_k}. \tag{9}$$

Приведём примеры, при которых $\delta_k = 0$:

1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = (-1)^{k-1}\, \lambda_4,\ k \in \mathbb{N}$;
2) $\lambda_3 = \lambda_4 = 0,\ \lambda_1 = (-1)^{k-1}\, \lambda_2,\ k \in \mathbb{N}$;
3) $\lambda_1 = \lambda_4 = 0,\ \lambda_2 = (-1)^k\, \mu_k^2\, \lambda_3,\ k \in \mathbb{N}$;
4) $\lambda_2 = \lambda_3 = 0,\ \lambda_1 = (-1)^k\, \mu_k^2\, \lambda_4,\ k \in \mathbb{N}$.

Пусть при некоторых значениях λ_i $\left(i \in \overline{1,\, 4}\right)$ и $k = p \in \mathbb{N}$ нарушено условие (8), тогда a_p может принимать любое значение и однородная задача, соответствующая задаче 1 при $f(x,\, y) \equiv 0$ и $g(x) \equiv 0$, имеет нетривиальное решение вида

$$u_p(x,y) = \begin{cases} a_p\, \sin\mu_p\, x\, e^{-\mu_p^2\, y}, & 0 \leqslant y \leqslant h, \quad p \in \mathbb{N}, \\ a_p\, \sin\mu_p\, x\, (\cos\mu_p\, y - \mu_p\, \sin\mu_p\, y), & -r \leqslant y \leqslant 0, \quad p \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

причём неоднородная задача 1 будет иметь решение только в том случае, когда выполнено условие

$$\int\limits_0^r \Big([\lambda_3 + (-1)^p\, \lambda_4]\, f(x,\, 0) + g(x) \Big)\, \sin\mu_p\, x\, dx = 0.$$

Из (6) и (9) видно, что если $f(x,\, y) \equiv 0$, $g(x) \equiv 0$ и $\delta_k \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, то из (4) имеем

$$u_k(y) = \sqrt{\frac{2}{r}} \int\limits_0^r u(x,y)\, \sin\mu_k\, x\, dx = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, в силу полноты системы функций (5) в пространстве $L_2[0,\, r]$ и непрерывности $u(x,y)$ в $\overline{\Omega}$, следует, что $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 1. *Если существует решение $u(x,y)$ задачи 1, то оно однозначно определяется только тогда, когда выполнено условие* (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.
2. *Нахушева З.А.* Нелокальные краевые задачи для основных и смешанного типов дифференциальных уравнений. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2011. 196 с.
3. *Нахушева З.А.* Об одной нелокальной задаче А.А. Дезина для уравнения Лаврентьева—Бицадзе // Дифференц. уравнения, 2009. Т. 45, № 8. С. 1199–1203.
4. *Сабитов К.Б.* Задача Дезина для уравнения смешанного типа со степенным вырождением // Дифференц. уравнения, 2019. Т. 55, № 10. С. 1426–1431.
5. *Сабитов К.Б., Новикова В.А.* Нелокальная задача А.А. Дезина для уравнения Лаврентьева—Бицадзе // Изв. вузов. Матем., 2016. № 6. С. 61–72.
6. *Сабитов К.Б.* Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // Доклады Академии наук, 2007. Т. 413, № 1. С. 23–26.
7. *Будак Б.М., Фомин С.В.* Кратные интегралы и ряды: Серия «Курс высшей математики и математической физики». М.: Наука, 1967. 608 с.

ABSTRACT

In this paper investigated a problem with Dezin type condition for parabolic-hyperbolic mixed type equation. It is established a criterion for solution uniqueness to the problem.

Keywords: Dezin problem analog, non-local value problem, parabolic-hyperbolic type equation, mixed type equation.

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik
E-mail: kirzhinov.r@mail.ru

АННОТАЦИЯ

Для модельного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа исследована задача с аналогом условия Дезина. Доказана теорема единственности решения.

Ключевые слова. аналог задачи Дезина, нелокалная задача, уравнение параболо-гиперболического типа, уравнение смешанного типа.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик
E-mail: kirzhinov.r@mail.ru