УДК 517.95
DOI: 10.47928/1726-9946-2021-21-4-18-21

Смешанная задача для неоднородного уравнения Аллера

Макаова Р.Х.

Представлено академиком АМАН А.В. Псху

Посвящается 30-летию ИПМА КБНЦ РАН

В прямоугольной области $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < r, 0 < y < T\}$ рассматривается уравнение Аллера

$$\frac{\partial u}{\partial y} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + f(x,y), \tag{1}$$

где a, b – заданные положительные числа; $u = u(x,y)$ – искомая действительная функция независимых переменных x и y; $f(x,y)$ – известная функция.

Уравнение (1) является уравнением третьего порядка гиперболического типа, хотя его принято называть уравнением псевдопараболического типа [1]. Исследованию различных краевых задач для уравнений третьего порядка псевдопараболического типа, в частности, и для уравнения Аллера посвящены работы [2-8].

В данной работе для неоднородного уравнения Аллера (1) исследуется смешанная краевая задача.

Регулярным в области Ω решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(x,y)$ такую, что $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, u_{xx}, $u_{xxy} \in C(\Omega)$ и удовлетворяющую уравнению (1).

Исследуется следующая

Задача. *Найти регулярное в области Ω решение уравнения* (1)*, удовлетворяющее начальному условию*

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le r, \tag{2}$$

и граничным условиям

$$u(0,y) = u_x(r,y) = 0, \quad 0 \le y < T. \tag{3}$$

Доказана следующая

Теорема. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в $\bar{\Omega}$, имеет кусочно непрерывную производную в Ω и $f(0,y) = f_x(r,y) = 0$, а также существует ограниченная производная $f_{xx}(x,y)$. Тогда задача* (2), (3) *для уравнения* (1) *имеет и притом единственное регулярное решение.*

Действительно, применяя метод разделения переменных, нетривиальное решение задачи (2), (3) для однородного уравнения Аллера из (1) ищем в виде $u(x,y) = X(x)Y(y)$, где $X(x)$ - функция только переменного x, $Y(y)$ - функция только переменного y.

Подставляя предполагаемую форму в однородное уравнение Аллера, получаем

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{aX''}{X - bX''} = -\lambda, \quad \lambda > 0 = const. \tag{4}$$

Таким образом, для определения функции $X(x)$ из (4), с учетом (3) приходим к следующей задаче на собственные значения:

$$X'' + \mu X = 0, \quad \mu = \frac{\lambda}{a - b\lambda}, \tag{5}$$

$$X(0) = X'(r) = 0. \tag{6}$$

При $\mu \leq 0$ задача (5), (6) имеет только тривиальное решение $u(x, y) \equiv 0$. Пусть $\mu > 0$. Тогда нетривиальные решения задачи (5), (6) возможны лишь при значениях

$$\mu_n = \left[\frac{\pi(2n-1)}{2r}\right]^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$X_n(x) = C_n sin(\sqrt{\mu_n} x), \quad C_n = const.$$

Легко заметить, что система $\left\{sin(\sqrt{\mu_n}x)\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{sin\left[\frac{\pi(2n-1)}{2r}x\right]\right\}_{n=1}^{\infty}$ собственных функций задачи (5), (6) образует полную ортогональную систему в пространстве $L_2[0, r]$.

Найдем решение неоднородного уравнения Аллера. Решение уравнения (1) будем искать в виде ряда Фурье по собственным функциям задачи (5), (6), т.е. в виде

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) sin(\sqrt{\mu_n} x), \tag{7}$$

где $u_n(y)$ – пока неизвестные достаточно гладкие функции.

В силу условий теоремы правую часть $f(x, y)$ уравнения (1) можно разложить в равномерно сходящийся ряд Фурье по полной ортогональной системе собственных функций задачи (5), (6):

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) sin(\sqrt{\mu_n} x), \tag{8}$$

где

$$f_n(y) = \frac{2}{r} \int\limits_0^r f(\xi, y) sin(\sqrt{\mu_n} \xi) d\xi.$$

Из (1) и (2) с учетом (7) и (8) приходим к следующей задаче относительно искомых функции $u_n(y)$:

$$(1 + b\mu_n) u_n'(y) + a\mu_n u_n(y) = f_n(y),$$

$$u_n(0) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

решение которого выписывается по формуле

$$u_n(y) = \frac{1}{1+b\mu_n}\int\limits_0^y e^{-\frac{a\mu_n}{1+b\mu_n}(y-\eta)} f_n(\eta)d\eta, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Подставляя выражения (8) и (9), из (7) находим решение задачи (2), (3) для уравнения (1) в виде

$$u(x,y) = \int\limits_0^y \int\limits_0^r G(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{10}$$

где

$$G(x,y;\xi,\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{r(1+b\mu_n)} e^{-\frac{a\mu_n}{1+b\mu_n}(y-\eta)} sin(\sqrt{\mu_n}x)sin(\sqrt{\mu_n}\xi), \quad \mu_n = \left[\frac{\pi(2n-1)}{2r}\right]^2. \tag{11}$$

Решение (10) сходится равномерно, так как (11) при всех $y-\eta \geq 0$ является рядом, который мажорируется абсолютно сходящимся числовым рядом $8r\sum\limits_{n=1}^{\infty}[4r^2+b\pi^2(2n-1)^2]^{-1}$. Из представления (11) непосредственно видно, что и ряд для $u_y(x,y)$ равномерно сходится. Так как существует ограниченная производная $f_{xx}(x,y)$, то цепочка равенств, полученных последовательным интегрированием по частям с учетом $G(x,y;\xi,\eta) = G(\xi,y;x,\eta)$ и $G(0,y;\xi,\eta) = G_x(r,y;\xi,\eta) = 0$ доказывает существование производных u_{xx}, u_{xxy}:

$$u_{xx}(x,y) = \int\limits_0^y \int\limits_0^r G_{\xi\xi}(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta = \int\limits_0^y \left[G_\xi(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)\right]\Big|_0^r d\eta -$$

$$-\int\limits_0^y \left[G(x,y;\xi,\eta)f_\xi(\xi,\eta)\right]\Big|_0^r d\eta + \int\limits_0^y \int\limits_0^r G(x,y;\xi,\eta)f_{\xi\xi}(\xi,\eta)d\xi d\eta =$$

$$= \int\limits_0^y \int\limits_0^r G(x,y;\xi,\eta)f_{\xi\xi}(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

$$u_{xxy}(x,y) = \int\limits_0^r G(x,y;\xi,y)f_{\xi\xi}(\xi,y)d\xi + \int\limits_0^y \int\limits_0^r G_y(x,y;\xi,\eta)f_{\xi\xi}(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Таким образом, если относительно заданной функции $f(x,y)$ выполнены перечисленные в сформулированной выше теореме условия, формула (10) является регулярным решением задачи (2), (3) для уравнения (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.

2. *Hallaire M.* L'eau et la productions vegetable // Institut National de la Recherche Agronomique. 1964, vol. 9.

3. *Coleman B.D., Duffin R.J., Mizel V.J.* Instability, uniqueness, and nonexistence theorems for the equation on a strip // Arch. Rat. Mech. Anal. 1965, vol. 19, pp. 100-116.

4. *Yangarber V.A.* The mixed problem for a modified moisture-transfer equation // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1967, vol. 8, № 1, pp. 62-64.

5. *Colton D.* Pseudoparabolic equations in one space variable // Journal of Differ. Equations. 1972, vol. 12, № 3, pp. 559-565.

6. *Шхануков М.Х.* О некоторых краевых задачах для уравнений третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 4. С. 689–699.

7. *Макаова Р.Х.* Вторая краевая задача для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана – Лиувилля // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т. 17, № 3. С. 35–38.

8. *Макаова Р.Х.* Первая краевая задача в нелокальной постановке для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана – Лиувилля // Вестник АГУ. Серия 4: Естественно-математические и технические науки. 2017. № 4 (211). С. 36–41.

ABSTRACT

A mixed boundary value problem is investigated for the inhomogeneous Hallaire equation. An explicit representation of the regular solution is found using the Fourier method.

Keywords. Hallaire equation, mixed boundary value problem, Fourier method.

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik
E-mail: makaova.ruzanna@mail.ru

АННОТАЦИЯ

Для неоднородного уравнения Аллера исследованна смешанная краевая задача. С помощью метода Фурье найдено явное представление регулярного решения.

Ключевые слова. Уравнение Аллера, смешанная краевая задача, метод Фурье.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик
E-mail: makaova.ruzanna@mail.ru