УДК 517.95
DOI: 10.47928/1726-9946-2021-21-4-22-29

Задача Коши для системы уравнений с частными производными Герасимова – Капуто

Мамчуев М.О. – член-корреспондент АМАН

Посвящается 30-летию ИПМА КБНЦ РАН

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\mathbf{L}u(x,y) \equiv \partial_{0y}^{\alpha}u(x,y) + \Lambda u_x(x,y) - Au(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

где $\alpha \in (0,1)$, ∂_{0y}^{α} – оператор дробного в смысле Герасимова – Капуто дифференцирования порядка α [1, с. 11], $A = ||a_{ij}||$, $\Lambda = \operatorname{diag}\|\lambda, -\lambda\|$, $u(x,y) = \|u_1(x,y), u_2(x,y)\|$ – искомая, а $f(x,y) = \|f_1(x,y), f_2(x,y)\|$ – заданая вектор-функции, $\lambda > 0$, a_{ij} – заданные действительные числа $(i,j = 1,2)$.

Фундаментальным решением системы (1) будем называть матрицу $Z(x,y;t,s)$, которая является решением уравнения

$$\mathbf{L}^*Z(x,y;t,s) \equiv D_{ys}^{\alpha}Z(x,y;t,s) - Z_t(x,y;t,s)\Lambda - Z(x,y;t,s)A = 0; \tag{2}$$

и для любого вектора $q(x) = \|q_1(x), q_2(x)\| \in C[x_1, x_2]$, удовлетворяет соотношению

$$\lim_{s\to y}\int\limits_{x_1}^{x_2}\left[D_{ys}^{\alpha-1}Z(x,y;t,s)\right]q(t)dt = q(x), \quad x_1 < x < x_2. \tag{3}$$

Фундаментальное решение $\Gamma(x-t, y-s)$ системы (1) выражается через функцию [2]:

$$\Gamma(x,y) = \frac{e^{a_0x}}{2\lambda^2}\int\limits_{|x|}^{\infty} g(y,\tau)K(x,\tau)d\tau + \Gamma_0(x,y), \quad \Gamma_0(x,y) = \frac{e^{a_0x}}{\lambda}g(y,|x|)H(x),$$

$$K(x,\tau) = \left\| \begin{matrix} \lambda|a|\frac{\tau+x}{\sqrt{\tau^2-x^2}}h_1(x,\tau) & a_{12}h_0(x,\tau) \\ a_{21}h_0(x,\tau) & \lambda|a|\frac{\tau-x}{\sqrt{\tau^2-x^2}}h_1(x,\tau) \end{matrix} \right\|, \quad H(x) = \left\| \begin{matrix} \eta(x) & 0 \\ 0 & \eta(-x) \end{matrix} \right\|,$$

$$h_m(x,\tau) = \begin{cases} (-1)^m J_m(|a|\sqrt{\tau^2-x^2}), & a_{12}a_{21} < 0, \\ I_m(a\sqrt{\tau^2-x^2}), & a_{12}a_{21} \geq 0, \end{cases} \qquad g(y,\tau) = \frac{e^{a_1\tau}}{y}\phi\left(-\alpha, 0; -\frac{\tau}{\lambda y^{\alpha}}\right),$$

$\phi(\alpha,\mu;z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!\Gamma(\alpha n+\mu)}$ – функция Райта [3], $\eta(x)$ – функция Хевисайда, $J_m(z)$ и $I_m(z)$ – функции Бесселя, $a_{0,1} = \frac{a_{11}\mp a_{22}}{2\lambda}$, $|a| = \frac{\sqrt{|a_{12}a_{21}|}}{\lambda}$.

Пусть $A(x,y) = \|a_{ij}(x,y)\|$, будем обозначать $|A(x,y)|_* = \max\limits_{i,j}|a_{ij}(x,y)|$. Аналогично $|b(x,y)|_* = \max\limits_{i}|b_i(x,y)|$, где $b(x,y)$ – вектор с компонентами $b_i(x,y)$.

Справедливы следующие свойства матрицы $\Gamma(x,y)$ [2], [4]:

1°. *Матрица* $\Gamma(x,y)$ *является решением уравнения* $\mathbf{L}\Gamma(x,y)=0$.

2°. *Матрица* $\Gamma(x-t,y-s)$ *является решением уравнения (2).*

3°. *Справедливы следующие оценки:*

$$|\Gamma(x,y)|_* \le C|x|^{-\theta}y^{\alpha\theta-1}, \quad \theta\in[-1;2], \tag{4}$$

$$|D_{0y}^{\alpha-1}\Gamma(x,y)|_* \le C|x|^{-\theta}y^{\alpha\theta-\alpha}, \quad \theta\in[0;2], \tag{5}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(x,y)\right|_* \le C|x|^{-\theta-1}y^{\alpha\theta-1}, \quad \theta\in[-1;2], \tag{6}$$

$$|D_{0y}^{\alpha}\Gamma(x,y)|_* \le C|x|^{-\theta-1}y^{\alpha\theta-1}, \quad \theta\in[-1;2], \tag{7}$$

где C *– положительная постоянная.*

4°. *Для любого* $x\neq 0$ *справедливо неравенство*

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}D_{0y}^{\nu}\Gamma(x,y)\right|_* \le C\exp\left[-\rho_0|x|^{\frac{1}{1-\alpha}}\right], \tag{8}$$

где $\rho_0 < T_\alpha = (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\lambda^{1/\alpha}T}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$, $k\in\{0,1\}$, $\nu\in\{0,\alpha-1,\alpha\}$, причем $k\nu=0$.

5°. *Для любого вектора* $q(x)=\|q_1(x),q_2(x)\|\in C[x_1,x_2]$, *выполняется соотношение*

$$\lim_{s\to y}\int\limits_{x_1}^{x_2}\left[D_{ys}^{\alpha-1}\Gamma(x-t,y-s)\right]q(t)dt = q(x), \quad -\infty\le x_1<x<x_2\le+\infty. \tag{9}$$

6°. *Пусть* $p(y)\in C(0,T]\cup L[0,T]$, *тогда имеет место соотношение*

$$\lim_{t\to x\pm 0}\int\limits_0^y \Gamma_0(x-t,y-s)p(s)ds = \frac{1}{\lambda}H(\mp 1)p(y), \quad y>\varepsilon>0, \tag{10}$$

где $H(1)=\mathrm{diag}\|1,0\|$, $H(-1)=\mathrm{diag}\|0,1\|$.

7°. *Пусть* $\varphi(x)\in C(-\infty,+\infty)$, $y^{1-\gamma}f(x,y)\in C(\bar\Omega)$, $0<\gamma<1$, *и выполняются соотношения*

$$\varphi(x)=O(\exp(\rho|x|^{\varepsilon})), \quad y^{1-\gamma}f(x,y)=O(\exp(\rho|x|^{\varepsilon})), \tag{11}$$

при $|x|\to\infty$, *где* $\varepsilon=\frac{1}{1-\alpha}$, $\rho<\rho_0<(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\lambda^{1/\alpha}T}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$. *Тогда*

$$I_{k,\nu,\pm}(x,y)=\int\limits_{x\pm\delta}^{\pm\infty}\frac{\partial^k}{\partial x^k}D_{0y}^{\nu}\Gamma(x-t,y)\varphi(t)dt\in C(\Omega), \tag{12}$$

$$J_{k,\nu,\pm}(x,y)=\int\limits_0^y\int\limits_{x\pm\delta}^{\pm\infty}\frac{\partial^k}{\partial x^k}D_{ys}^{\nu}\Gamma(x-t,y-s)f(t,s)dtds\in C(\Omega), \tag{13}$$

где $k\in\{0,1\}$, $\nu\in\{0,\alpha-1,\alpha\}$, *причем* $k\nu=0$.

Решение $u(x,y)$ системы (1) назовём регулярным в области Ω, если $u(x,y) \in C(\bar{\Omega})$, $\partial_{0y}^{\alpha} u(x,y)$, $\frac{\partial}{\partial x} u(x,y) \in C(\Omega)$.

Пусть $\Omega = \{(x,y):\ l_1 < x < l_2,\ 0 < y < T\}$, $\Omega_y = \{(t,s):\ l_1 < t < l_2,\ 0 < s < y\}$. Общее представление регулярных в прямоугольной области Ω решений даёт следующая

Теорема 1. *Пусть $y^{1-\gamma} f(x,y) \in C(\bar{\Omega})$, $0 < \gamma < 1$, $u(x,y)$ – регулярное в области Ω решение системы (1) удовлетворяющее условию*

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [l_1, l_2], \tag{14}$$

где $\varphi(x) \in C[l_1, l_2]$. Тогда $u(x,y)$ удовлетворяет соотношению

$$u(x,y) = \int\limits_{l_1}^{l_2} D_{0y}^{\alpha-1} G(x,y;t,0) u(t,0) dt + \int\limits_{0}^{y} G(x,y;l_1,s) \Lambda u(l_1,s) ds -$$

$$- \int\limits_{0}^{y} G(x,y;l_2,s) \Lambda u(l_2,s) ds + \int\limits_{0}^{y} \int\limits_{l_1}^{l_2} [G(x,y;t,s) f(t,s) - h(x,y;t,s) u(t,s)] dt ds, \tag{15}$$

где $G(x,y;t,s) = \Gamma(x-t, y-s) - V(x,y;t,s)$, матрица $V \equiv V(x,y;t,s)$ – решение уравнения

$$\mathbf{L}^* V(x,y;t,s) = h(x,y;t,s), \quad s^{\gamma-1} h(x,y;t,s) \in C(\Omega_y),$$

такое, что $V \in L(\Omega_y) \cap C(\bar{\Omega} \times \Omega_y)$, $\frac{\partial}{\partial t} V, D_{ys}^{\alpha} V \in C(\Omega \times \Omega_y)$.

Доказательство. Пусть $y_\varepsilon = y - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $0 < y_\varepsilon < y < T$. Имеет место равенство [5]:

$$\int\limits_{0}^{y_\varepsilon} [G(x,y;t,s) \partial_{0s}^{\alpha} u(t,s) - (D_{ys}^{\alpha} G(x,y;t,s)) u(t,s)] ds =$$

$$= D_{yy_\varepsilon}^{\alpha-1} G(x,y;t,y_\varepsilon) \cdot u(t,y_\varepsilon) - D_{0y}^{\alpha-1} G(x,y;t,0) \cdot u(t,0) - RG(x,y;t,y_\varepsilon), \tag{16}$$

причем последнее слагаемое в правой части (16), при $\varepsilon \to 0$, удовлетворяет соотношению

$$RG(x,y,y_\varepsilon,t) = O(\varepsilon^{\alpha\theta}), \quad \theta \in (0,1).$$

Пользуясь тем, что $G \Lambda u_t + G_t \Lambda u = (G \Lambda u)_t$ и интегрируя выражение $G\mathbf{L}u - (\mathbf{L}^* G) u$ по области $\Omega_{0,\varepsilon}^{\delta_1,\delta_2} = \{(t,s): l_1 + \delta_1 < t < l_2 - \delta_2,\ 0 < s < y - \varepsilon\}$, с учетом (16), получим

$$\int\limits_{l_1+\delta_1}^{l_2-\delta_2} \int\limits_{0}^{y_\varepsilon} \left[G(x,y;t,s) \mathbf{L} u(t,s) - \left(\mathbf{L}^* G(x,y;t,s) \right) u(t,s) \right] dt ds =$$

$$= \int\limits_{0}^{y_\varepsilon} G(x,y;l_2-\delta_2,s) \Lambda u(l_2-\delta,s) ds - \int\limits_{0}^{y_\varepsilon} G(x,y;l_1+\delta_1,s) \Lambda u(l_1+\delta_1,s) ds +$$

$$+\int\limits_{l_1+\delta_1}^{l_2-\delta_2}\left[\left(D^{\alpha-1}_{yy_\varepsilon}G(x,y;t,y_\varepsilon)\right)u(t,y_\varepsilon)-D^{\alpha-1}_{0y}G(x,y;t,0)\varphi(t)\right]dt-\int\limits_{l_1+\delta_1}^{l_2-\delta_2}RG(x,y;y_\varepsilon,t)dt. \quad (17)$$

Из (1), (2), (17) и условия (3), устремляя сначала ε, а затем δ_1 и δ_2 к нулю получаем соотношение (15). Теорема 1 доказана.

Задача Коши для системы (1) формулируется следующим образом.

Задача. *В области* $\Omega=\{(x,y):\ x\in\mathbb{R},\ 0<y<T\}$, *найти решение* $u(x,y)$ *системы* (1), *удовлетворяющее условию*

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad x\in\mathbb{R}, \quad (18)$$

где $\varphi(x)=\|\varphi_1(x),\varphi_2(x)\|$ – *заданная вектор-функция.*

Теорема 2. *Пусть функция* $f(x,y)$ *представима в виде* $f(x,y)=D^{-\nu}_{0y}f^*(x,y)$, *где* $y^{1-\mu}f^*(x,y)\in C(\overline{\Omega})$, $0<\nu<1-\alpha$, $\nu+\mu>0$, *функция* $\varphi(x)$ *удовлетворяет условию Гельдера и выполняются соотношения (11), тогда*

$$u(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}D^{\alpha-1}_{0y}\Gamma(x-t,y)\varphi(t)dt+\int\limits_0^y\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(x-t,y-s)f(t,s)dtds \quad (19)$$

является регулярным решением задачи (1), (18).

Доказательство. Обозначим $u_0(x,y)$ и $u_f(x,y)$ соответственно первое и второе слагаемые в правой части равенства (19). Пользуясь (11), свойствами 3°, 4° и 7°, получим оценки

$$|u_0(x,y)|_*\le Cy^{\alpha\theta-\alpha}\exp(\rho_1|x|^\varepsilon),\quad |u_f(x,y)|_*\le Cy^{\alpha\theta+\mu+\nu-\alpha}\exp(\rho_1|x|^\varepsilon),\quad \theta\in(0,1), \quad (20)$$

где ρ_1 зависит от ρ и ρ_0.

В силу (9) и оценок (20) получим

$$\lim_{y\to0}u_0(x,y)=\varphi(x),\quad \lim_{y\to0}u_f(x,y)=0. \quad (21)$$

Из (20) и (21) следует, что $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$.

Покажем, что функция (19) является решением задачи (1), (18). Используя равенства

$$D^\alpha_{0y}\Gamma(x-t,y)=\Lambda\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(x-t,y)+A\Gamma(x-t,y), \quad (22)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(x-t,y-s)dt=0$$

получим

$$\partial^\alpha_{0y}u_0(x,y)=D^{\alpha-1}_{0y}\frac{\partial}{\partial x}u_0(x,y)=D^{\alpha-1}_{0y}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}D^\alpha_{0y}\Gamma(x-t,y)\varphi(t)dt=$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} D_{0y}^{\alpha-1} D_{0y}^{\alpha}\Gamma(x-t,y)[\varphi(t)-\varphi(x)]dt + D_{0y}^{\alpha-1}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} D_{0y}^{\alpha}\Gamma(x-t,y)dt\right)\varphi(x) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} D_{0y}^{\alpha-1} D_{0y}^{\alpha}\Gamma(x-t,y)[\varphi(t)-\varphi(x)]dt + A\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} D_{0y}^{\alpha-1}\Gamma(x-t,y)dt\right)\varphi(x). \qquad (23)$$

Для нахождения $\frac{\partial}{\partial x}u_0(x,y)$ рассмотрим функцию

$$F_{\delta_1,\delta_2}(x,y) = \left(\int\limits_{-\infty}^{x-\delta_1} + \int\limits_{x+\delta_2}^{\infty}\right) D_{0y}^{\alpha-1}\Gamma(x-t,y)\varphi(t)dt.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{\substack{\delta_1\to 0\\ \delta_2\to 0}} F_{\delta_1,\delta_2}(x,y) = u_0(x,y) \in C(\Omega)$. Из оценок (5) и (6) следует, что её производная

$$\frac{\partial}{\partial x}F_{\delta_1,\delta_2}(x,y) = D_{0y}^{\alpha-1}\Gamma(\delta_1,y)\varphi(x-\delta_1) - D_{0y}^{\alpha-1}\Gamma(-\delta_2,y)\varphi(x+\delta_2)+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{x-\delta_1} D_{0y}^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(x-t,y)[\varphi(t)-\varphi(x)]dt - D_{0y}^{\alpha-1}\Gamma(\delta_1,y)\varphi(x)+$$

$$+\int\limits_{x+\delta_2}^{\infty} D_{0y}^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(x-t,y)[\varphi(t)-\varphi(x)]dt + D_{0y}^{\alpha-1}\Gamma(-\delta_2,y)\varphi(x)$$

при $\delta_1 \to 0$ и $\delta_2 \to 0$ непрерывна в Ω. Следовательно

$$\lim\limits_{\substack{\delta_1\to 0\\ \delta_2\to 0}} \frac{\partial}{\partial x}F_{\delta_1,\delta_2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\lim\limits_{\substack{\delta_1\to 0\\ \delta_2\to 0}} F_{\delta_1,\delta_2}(x,y)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x}u_0(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} D_{0y}^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(x-t,y)[\varphi(t)-\varphi(x)]dt. \qquad (24)$$

Из равенств (22) – (24) и оценок (4) – (7), следует, что $u_0(x,y)$ есть решение однородной системы (1) такое, что $\partial_{0y}^{\alpha}u_0(x,y)$, $\frac{\partial}{\partial x}u_0(x,y) \in C(\Omega)$.

По условию теоремы, $f(x,y) = D_{0y}^{-\nu}f^*(x,y)$, следовательно

$$\partial_{0y}^{\alpha}u_f(x,y) = D_{0y}^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial y}u_f(x,y) = D_{0y}^{\alpha-1}D_{0y}^{1-\alpha}D_{0y}^{\alpha}\int\limits_0^y ds\int\limits_{-\infty}^{\infty} D_{ys}^{-\nu}\Gamma(x-t,y-s)f^*(t,s)dt. \qquad (25)$$

Учитывая, что

$$D_{0y}^{1-\nu}\Gamma(x,y) = D_{0y}^{1-\alpha}D_{0y}^{\alpha}D_{0y}^{-\nu}\Gamma(x,y)$$

получим

$$D_{0y}^{1-\nu}\Gamma(x,y)=\frac{e^{a_0x}}{2\lambda}\int\limits_{|x|}^{\infty}D_{0y}^{1-\alpha-\nu}g(y,\tau)\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+a_1\right)K(x,\tau)d\tau+$$

$$+\frac{e^{a_0x}}{2\lambda}D_{0y}^{1-\alpha-\nu}g(y,|x|)K(x,|x|)+\frac{e^{a_1x}}{\lambda}D_{0y}^{1-\nu}g(y,|x|)H(x). \tag{26}$$

Из (26) следует оценка

$$|D_{0y}^{1-\nu}\Gamma(x,y)|\le C|x|^{-\theta}y^{\nu+\alpha\theta-2},\quad \theta\ge 0,$$

и непрерывность производной

$$\partial_{0y}^{\alpha}u_f(x,y)=\int\limits_0^y ds\int\limits_{-\infty}^{\infty}D_{ys}^{\alpha-\nu}\Gamma(x-t,y-s)f^*(t,s)dt, \tag{27}$$

где

$$D_{0y}^{\alpha-\nu}\Gamma(x,y)=\frac{e^{a_0x}}{2\lambda}\int\limits_{|x|}^{\infty}D_{0y}^{-\nu}g(y,\tau)\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+a_1\right)K(x,\tau)d\tau+$$

$$+\frac{e^{a_0x}}{2\lambda}D_{0y}^{-\nu}g(y,|x|)K(x,|x|)+\frac{e^{a_1x}}{\lambda}D_{0y}^{\alpha-\nu}g(y,|x|)H(x)=D_{0y}^{-\nu}D_{0y}^{\alpha}\Gamma(x,y). \tag{28}$$

Дифференцируя $u_f(x,y)$ по x, с учетом свойства 6^o, получим

$$\frac{\partial}{\partial x}u_f(x,y)=\int\limits_0^y ds\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}D_{ys}^{-\nu}(\Gamma-\Gamma_0)(x-t,y-s)f^*(t,s)dt+$$

$$+\lim_{t\to x-0}\int\limits_0^y\Gamma_0(x-t,y-s)f(t,s)ds-\lim_{t\to x+0}\int\limits_0^y\Gamma_0(x-t,y-s)f(t,s)ds+$$

$$+\int\limits_0^y ds\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}D_{ys}^{-\nu}\Gamma_0(x-t,y-s)f^*(t,s)dt=$$

$$=\int\limits_0^y ds\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}D_{ys}^{-\nu}\Gamma(x-t,y-s)f^*(t,s)dt+\frac{1}{\lambda}[H(1)f(x,y)+H(-1)f(x,y)]. \tag{29}$$

Из (27) и (29) следует, что

$$\partial_{0y}^{\alpha}u_f(x,y)+\Lambda\frac{\partial}{\partial x}u_f(x,y)-Au_f(x,y)=f(x,y).$$

Таким образом, функция (19) – решение системы (1), такое, что $\frac{\partial}{\partial x}u$, $\partial_{0y}^{\alpha}u\in C(\Omega)$. Выполнение условия (18) следует, из (21). Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Существует не более одного регулярного решения $u(x,y)$ задачи (1), (18), в классе функций удовлетворяющих для некоторого $k>0$ условию*

$$u(x,y) = O(\exp(k|x|^{\varepsilon})) \tag{30}$$

при $|x| \to \infty$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$h_r(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le r, \\ \cos^2[\pi(|t|-r)/2], & r \le |t| \le r+1, \\ 0, & |t| \ge r+1. \end{cases}$$

Очевидно, что $h_r(t) \in C^1(\mathbb{R})$, $0 \le h_r(t) \le 1$, $|h_r'(t)| \le \pi/2$.

Из свойства 2^o матрицы $\Gamma(x,y)$ следует, что

$$\mathbf{L}^* h_r(t)\Gamma(x-t;y-s) = \left(D_{ys}^{\alpha} - \frac{\partial}{\partial t} - A\right) h_r(t)\Gamma(x-t,y-s) = -h_r'(t)\Gamma(x-t,y-s). \tag{31}$$

С учетом (31) и теоремы 1 , получим, что регулярное в области

$$\Omega_r = \{(x,y) : |x| < r+1, 0<y<T\}$$

решение системы (1) представимо в виде

$$u(x,y) = \int\limits_{-r-1}^{r+1} D_{0y}^{\alpha-1} Z(x,y;t,0)\varphi(t)dt + \int\limits_0^y Z(x,y;-r-1,s)\Lambda u(-r-1,s)ds -$$

$$-\int\limits_0^y Z(x,y;r+1,s)\Lambda u(r+1,s)ds + \int\limits_0^y \int\limits_{-r-1}^{r+1} [Z(x,y;t,s)f(t,s) - \mathbf{L}^* Z(x,y;t,s)u(t,s)]dtds, \tag{32}$$

где $Z(x,y;t,s) = h_r(t)\Gamma(x-t,y-s)$.

Пусть $u(x,y)$ – решение однородной задачи (1), (18), тогда, в силу (31), равенство (32) примет вид

$$u(x,y) = \int\limits_0^y \left(\int\limits_{-r-1}^{-r} + \int\limits_r^{r+1} \right) h_r'(t)\Gamma(x-t,y-s)u(t,s)dtds. \tag{33}$$

Из (33) следует (см. [4]), что $u(x,y) \equiv 0$ в области

$$\Omega_0 = \{(x,y) : x \in \mathbb{R},\, 0<y<T_0\}, \quad T_0 < \alpha\lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{1-\alpha}{k}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

Докажем, что $u(x,y) \equiv 0$ в Ω. Предположим, что $u(x,y)$ не обращается тождественно в ноль в Ω. Пусть $y_0 = \inf\{y : u(x,y) \ne 0\}$, ясно, что $y_0 \ge T_0$. Рассмотрим функцию $v(x,y) = u(x,y_0+y)$. Тогда $\forall \delta > 0$ найдется такое значение x, что $v(x,\delta) \ne 0$. Поскольку

$u(x,y) \equiv 0$ при $0 < y < y_0$, то $\partial_{0y}^{\alpha} u(x,y) = \partial_{y_0 y}^{\alpha} u(x,y) = \partial_{0y}^{\alpha} v(x,y)$. Отсюда следует, что в области $\Omega_1 = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, 0 < y < T_1\}$, $T_1 = \min\{T - y_0, T_0\}$, функция $v(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_{0y}^{\alpha} v(x,y) + \Lambda v_x(x,y) - Av(x,y) = 0,$$

а также условиям (30) и $\lim\limits_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1} v(x,y) = 0$. Поэтому из доказанного выше следует, что $v(x,y) \equiv 0$, по крайней мере, при $0 < y < T_1$. Это противоречит допущению. Следовательно $u(x,y) \equiv 0$ для любого $y > 0$. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. *Мамчуев М.О.* Фундаментальное решение системы уравнений с частными производными дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 8. С. 1113-1124.
3. *Wright E.M.* The asymptotic expansion of the generalized Bessel function // Proc. London Math. Soc. Ser. II, 1934, vol. 38, pp. 257-270.
4. *Мамчуев М.О.* Задача Коши в нелокальной постановке для системы уравнений с частными производными дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 3. С. 351-358.
5. *Mamchuev M.O.* Boundary Value Problem for the Time-Fractional Telegraph Equation with Caputo Derivatives // Mathematical Modelling of Natural Phenomena, 2017, vol. 12(3), pp. 82-94.

ABSTRACT

For the system of equations with the partial Gerasimov – Caputo derivatives, a general representation of regular in a rectangular domain solutions is constructed. Cauchy problem is investigated. Theorems of existence and uniqueness of the solution are proved.

Keywords: system of partial differential equations, fractional derivative, Gerasimov – Caputo derivative, Green's function method, Cauchy problem, fundamental solution.

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik
E-mail: mamchuev@rambler.ru

АННОТАЦИЯ

Для системы уравнений с частными дробными производными Герасимова – Капуто построено общее представление регулярных решений в прямоугольной области. Исследована задача Коши. Доказаны теоремы существования и единственности решения.

Ключевые слова: системы уравнений с частными производными, дробная производная, производная Герасимова – Капуто, метод функции Грина, задача Коши, фундаментальное решение.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик
E-mail: mamchuev@rambler.ru