УДК 517.95
DOI: 10.47928/1726-9946-2021-21-4-30-36

Функция Римана задачи Гурса для обобщенного телеграфного уравнения с постоянными коэффициентами

Пшибихова Р.А.

Представлено академиком АМАН А.В. Псху

1. Введение. Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^{\alpha}D_{0y}^{\beta}u(x,y)+aD_{0x}^{\alpha}u(x,y)+bD_{0y}^{\beta}u(x,y)+cu(x,y)=f(x,y),\quad \alpha,\beta\in(0,1),\tag{1}$$

где D_{0s}^{γ} — оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувиля порядка γ с началом в точке 0 по переменной $s>0$, определенный следующим образом [1, с. 9]:

$$D_{0s}^{\gamma}f(s)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(-\gamma)}\int\limits_0^s\frac{f(v)}{(s-v)^{\gamma+1}}dv, & \gamma<0,\\ f(s), & \gamma=0,\\ \frac{d^n}{ds^n}D_{0s}^{\gamma-n}f(s), & n-1<\gamma\le n,\ n\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

где a,b,c – const. Ранее в работе [2] показано, что если известна функция Римана, то решение уравнения (1) имеет вид:

$$u(x,y)=\int\limits_0^x\int\limits_0^y f(s,t)w_{xy}(x-s,y-t)dtds+\int\limits_0^x\psi(s)\partial_{xs}^{\alpha}w_{xy}(x-s,y)ds+$$

$$+\int\limits_0^y\varphi(t)\partial_{yt}^{\beta}w_{xy}(x,y-t)dt+b\int\limits_0^x w_{xy}(x-s,y)\psi(s)ds+$$

$$+a\int\limits_0^y w_{xy}(x,y-t)\varphi(t)dt-w_{xy}(x,y)\varphi_0.\tag{2}$$

Здесь $\varphi_0=\lim\limits_{y\to0}D_{0y}^{\beta-1}\varphi(y)$, $w(x-s,y-t)$ – есть решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$w(x-s,y-t)+aD_{yt}^{-\beta}w(x-s,y-t)+bD_{xs}^{-\alpha}w(x-s,y-t)+$$

$$+cD_{xs}^{-\alpha}D_{yt}^{-\beta}w(x-s,y-t)=\frac{(x-s)^{\alpha}(y-t)^{\beta}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)},$$

∂_{0s}^{γ} – производная Капуто порядка γ по переменной s, определяемая с помощью равенства [1, с. 11]:

$$\partial_{0s}^{\gamma}g(s)=D_{0s}^{\gamma-n}g^{(n)}(s),\quad n-1<\gamma\le n,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Цель данной работы найти явный вид функции Римана для уравнения с постоянными коэффициентами. Ранее,в работе [3] и [4] доказана теорема существования и единственности решения аналога задачи Гурса для уравнения вида (1) при

$$a = b = 0, c = const.$$

А в работе [5] для уравнения (1) в случае $a = b = c = 0$, рассмотрены аналоги задач Коши и Гурса. В работе [6] для уравнения (1) в случае $\alpha = \beta = 1$ рассмотрена задача Коши. Более полный обзор работ, посвященных исследованию уравнений в частных производных дробного порядка можно найти в [7] и [8].

1. Постановка задачи и формулировка результатов. Примем обозначения: $D = (0,a) \times (0,b)$, $a < \infty, b < \infty, I = \{(x,y) : \ x \ \in \ (0,a), y = \ 0\}$, $J = \{(x,y) : x = 0,$ $y \in (0,b)\}$.

Регулярным решением уравнения (1) в области D назовем функцию $u = u(x,y)$ из класса $x^{1-\mu}y^{1-\delta}u(x,y) \in \ C(\overline{D})$,для некоторых $\mu > 0, \delta > 0$, $D^{\alpha-1}_{0x}D^{\beta-1}_{0y}u(x,y)$ имеет непрерывные частные производные в области D по x, y, $D^{\alpha-1}_{0x}u(x,y) \in \ C(D \cup J)$, $D^{\beta-1}_{0y}u(x,y) \in$ $C(D \cup I)$, удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(x,y) \in D$.

Задача Гурса. *Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{y\to 0} D^{\beta-1}_{0y}u(x,y) = \psi(x), \quad 0 < x < a, \tag{3}$$

$$\lim_{x\to 0} D^{\alpha-1}_{0x}u(x,y) = \varphi(y), \quad 0 < y < b, \tag{4}$$

где φ, ψ–заданные непрерывные функции.

В работе [2] было доказано следующее утверждение:

Теорема. *Пусть* $x^{1-\mu}y^{1-\delta}f(x,y) \in C(\overline{D}), \lim\limits_{x\to 0} x^{1-\mu}\psi(x) < \infty, \lim\limits_{y\to 0} y^{1-\delta}\varphi(y) < \infty$, $\mu > 0$, $\delta > 0$, $D^{\beta-1}_{0y}\varphi(y) \in C[0,b] \cap C^1(0,b)$, $D^{\alpha-1}_{0x}\psi(x) \in \ C[0,a] \cap C^1(0,a)$, *и выполнено условие согласования*

$$\lim_{y\to 0} D^{\beta-1}_{0y}\varphi(y) = \lim_{x\to 0} D^{\alpha-1}_{0x}\psi(x).$$

Тогда существует единственное регулярное решение уравнения (1) в области D, удовлетворяющее краевым условиям (3) и (4). Решение имеет вид (2).

2. Функция Римана. Функцией Римана задачи (1),(3),(4) назовем решение уравнения:

$$\partial^{\alpha}_{xs}\partial^{\beta}_{yt}w(x,y,s,t) + a\partial^{\alpha}_{xs}w(x,y,s,t) + b\partial^{\beta}_{yt}w(x,y,s,t) + cw(x,y,s,t) = 1, \tag{5}$$

удовлетворяющее условиям

$$w(x,y,s,y) = 0, s \in [0;x] \ \ w(x,y,x,t) = 0, t \in [0;y]. \tag{6}$$

Пусть $u(x,y)-$ регулярное решение уравнения (1), а $w(x,y,s,t)$ есть функция Римана задачи (1), (3), (4). Так как по определению

$$\partial_{0s}^{\gamma} g(s) = D_{0s}^{\gamma-1} g^{'}(s), \quad 0 < \gamma \leq 1,$$

то применяя к обеим частям уравнения (5) операторы $D_{xs}^{1-\alpha} D_{yt}^{1-\beta}$,получим:

$$D_{xs}^{1} D_{yt}^{1} w(x-s, y-t) + aD_{yt}^{1-\beta} w(x-s, y-t) + bD_{xs}^{1-\alpha} w(x-s, y-t)$$

$$+cD_{xs}^{1-\alpha} D_{yt}^{1-\beta} w(x-s, y-t) = \frac{(x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}. \tag{7}$$

Применяя далее операторы D_{xs}^{-1}, D_{yt}^{-1}, к уравнению (7), с учетом (6),получаем, что задача (5), (6) эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$w(x-s, y-t) + aD_{yt}^{-\beta} w(x-s, y-t) + bD_{xs}^{-\alpha} w(x-s, y-t) + cD_{xs}^{-\alpha} D_{yt}^{-\beta} w(x-s, y-t) =$$

$$= \frac{(x-s)^{\alpha}(y-t)^{\beta}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)},$$

решение которого существует и единственно.

Вводя обозначение

$$x - s = \xi, \;\; y - t = \eta$$

получим:

$$w(\xi,\eta) + aD_{0\eta}^{-\beta} w(\xi,\eta) + bD_{0\xi}^{-\alpha} w(\xi,\eta) + cD_{0\xi}^{-\alpha} D_{0\eta}^{-\beta} w(\xi,\eta) = \frac{\xi^{\alpha}\eta^{\beta}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}. \tag{8}$$

Примем следующие обозначения:

$$I(g(t)) = g(t);$$

$$\mathcal{E}_{t,\mu}^{\gamma} g(t) = \int_0^t g(s)(t-s)^{\gamma-1} E_{\gamma,\gamma}[-\mu(t-s)^{\gamma}]ds. \tag{9}$$

Перепишем уравнение (8) в виде:

$$(I + aD_{0\eta}^{-\beta})(I + bD_{0\xi}^{-\alpha}) w(\xi,\eta) + (c - ab) D_{0\xi}^{-\alpha} D_{0\eta}^{-\beta} w(\xi,\eta) = \frac{\xi^{\alpha}\eta^{\beta}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}. \tag{10}$$

Известно, что решение интегрального уравнения Абеля второго рода

$$\nu(\eta) + aD_{0\eta}^{-\beta} \nu(\eta) = f(\eta)$$

или

$$(I + aD_{0\eta}^{-\beta})\nu(\eta) = f(\eta)$$

можно записать в виде

$$\nu(\eta)=f(\eta)-a\int_0^\eta f(s)(\eta-s)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}[-a(\eta-s)^\beta]ds.$$

Или, учитывая обозначение (9),

$$\nu(\eta)=(1-a\mathcal{E}^\beta_{\eta,a})f(\eta).$$

Таким образом, можем записать

$$(I+aD^{-\beta}_{0\eta})^{-1}=I-a\mathcal{E}^\beta_{\eta,a} \tag{11}$$

и, аналогично,

$$(I+bD^{-\alpha}_{0\xi})^{-1}=I-b\mathcal{E}^\alpha_{\xi,b}. \tag{12}$$

С учетом этого уравнение (10) можно переписать в виде:

$$w(\xi,\eta)+(c-ab)(I+aD^{-\beta}_{0\eta})^{-1}(I+bD^{-\alpha}_{0\xi})^{-1}D^{-\alpha}_{0,\xi}D^{-\beta}_{0,\eta}w(\xi,\eta)=$$

$$=(I+aD^{-\beta}_{0\eta})^{-1}(I+bD^{-\alpha}_{0\xi})^{-1}\frac{\xi^\alpha\eta^\beta}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}.$$

Или, принимая во внимание (11) и (12),

$$w(\xi,\eta)=\lambda(I-b\mathcal{E}^\alpha_{\xi,b})(I-a\mathcal{E}^\beta_{\eta,a})D^{-\alpha}_{0,\xi}D^{-\beta}_{0,\eta}w(\xi,\eta)+(I-a\mathcal{E}^\beta_{\eta,a})h_{\beta+1}(\eta)(I-b\mathcal{E}^\alpha_{\xi,b})h_{\alpha+1}(\xi). \tag{13}$$

Здесь и далее

$$\lambda=ab-c,\quad h_\gamma(t)=\frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}.$$

Решение уравнения (13) выпишем формально в форме ряда Неймана

$$w(\xi,\eta)=\sum_{k=0}^\infty\lambda^k[(I-b\mathcal{E}^\alpha_{\xi,b})D^{-\alpha}_{0\xi}]^k(I-b\mathcal{E}^\alpha_{\xi,b})h_{\alpha+1}(\xi)[(I-a\mathcal{E}^\beta_{\eta,a})D^{-\beta}_{0,\eta}]^k(I-a\mathcal{E}^\beta_{\eta,a})h_{\beta+1}(\eta)$$

В силу формулы дробного интегрирования степенных функций [7, с. 26]

$$D^{-\nu}_{0,t}h_\gamma(t)=h_{\gamma+\nu}(t),$$

нетрудно заметить, что

$$h_{\alpha+1}(\xi)=D^{-\alpha}_{0,\xi}h_1(\xi)$$

и, аналогично,

$$h_{\beta+1}(\eta)=D^{-\beta}_{0,\eta}h_1(\eta).$$

Отсюда, учитывая перестановочность операторов $\mathcal{E}^\alpha_{\xi,b}$ и $D^{-\alpha}_{0\xi}$, как и операторов $a\mathcal{E}^\beta_{\eta,a}$ и

$D_{0,\eta}^{-\beta}$, получаем:

$$w(\xi,\eta)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k[D_{0\xi}^{-\alpha}(I-b\mathcal{E}_{\xi,b}^{\alpha})]^{k+1}h_1(\xi)[D_{0\eta}^{-\beta}(I-a\mathcal{E}_{\eta,a}^{\beta})]^{k+1}h_1(\eta). \tag{14}$$

Далее, принимая во внимание обозначение (9) заметим, что

$$D_{0\xi}^{-\alpha}(I-b\mathcal{E}_{\xi,b}^{\alpha})g(\xi)=D_{0\xi}^{-\alpha}g(\xi)-bD_{0\xi}^{-\alpha}\int_0^{\xi}g(s)(\xi-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[-b(\xi-s)^{\alpha}]ds.$$

В силу определения оператора дробного интегрирования и формулы дробного интегрирования функции Миттаг-Леффлера [7, с. 15], получаем:

$$D_{0\xi}^{-\alpha}(I-b\mathcal{E}_{\xi,b}^{\alpha})g(\xi)=\int_0^{\xi}g(s)\{\frac{(\xi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}-b(\xi-s)^{2\alpha-1}E_{\alpha,2\alpha}[-b(\xi-s)^{\alpha}]\}ds.$$

Отсюда, с учетом формула автотрансформации для функции Миттаг-Леффлера [9, с. 13]

$$E_{\alpha,\mu}(z)=\frac{1}{\Gamma(\mu)}+zE_{\alpha,\mu+\alpha}(z),$$

приходим к равенству

$$D_{0\xi}^{-\alpha}(I-b\mathcal{E}_{\xi,b}^{\alpha})g(\xi)=\int_0^{\xi}g(s)(\xi-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[-b(\xi-s)^{\alpha}]ds.$$

То есть

$$D_{0\xi}^{-\alpha}(I-b\mathcal{E}_{\xi,b}^{\alpha})=\mathcal{E}_{\xi,b}^{\alpha}.$$

Аналогично,

$$D_{0\eta}^{-\beta}(I-a\mathcal{E}_{\eta,a}^{\beta})=\mathcal{E}_{\eta,a}^{\beta}.$$

С учетом последних двух соотношений, равенство (14) примет вид

$$w(\xi,\eta)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k(\mathcal{E}_{\xi,b}^{\alpha})^{k+1}h_1(\xi)(\mathcal{E}_{\eta,a}^{\beta})^{k+1}h_1(\eta). \tag{15}$$

Далее вычислим $(\mathcal{E}_{\xi,b}^{\alpha})^{k+1}$ и $(\mathcal{E}_{\eta,a}^{\beta})^{k+1}h_1(\eta)$. Следуя [10] введем оператор

$$G_{t,\mu}^{\gamma,\delta,\rho}g(t)=\int_0^{t}g(s)(t-s)^{\delta-1}E_{\gamma,\delta}^{\rho}[-\mu(t-s)^{\gamma}]ds,$$

где

$$E_{\gamma,\delta}^{\rho}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\rho)_k z^k}{k!\Gamma(\gamma k+\delta)}$$

- функция Прабхакара [10]. Из результатов работы [10] следует, что

$$\mathcal{E}_{t,\mu}^{\gamma}=G_{t,\mu}^{\gamma,\gamma,1}.$$

Поэтому, в силу теоремы 5 работы [10] имеем

$$(\mathcal{E}_{t,\mu}^{\gamma})^k = (G_{t,\mu}^{\gamma,\gamma,1})^k = G_{t,\mu}^{\gamma,k\gamma,k}.$$

Таким образом, учитывая, что $h_1(t) = 1$, получаем, что

$$(\mathcal{E}_{\xi,b}^{\alpha})^{k+1} h_1(\xi) = G_{\xi,b}^{\alpha,\alpha(k+1),k+1} 1 = \int_0^{\xi} s^{\alpha k+\alpha-1} E_{\alpha,\alpha k+\alpha}^{k+1}[-bs^{\gamma}]ds.$$

В силу теоремы 3 работы [10] приходим к равенству

$$(\mathcal{E}_{\xi,b}^{\alpha})^{k+1} h_1(\xi) = \xi^{\alpha k+\alpha} E_{\alpha,\alpha k+\alpha+1}^{k+1}[-b\xi^{\alpha}].$$

И, аналогично,

$$(\mathcal{E}_{\eta,a}^{\beta})^{k+1} h_1(\eta) = \eta^{\beta k+\beta} E_{\beta,\beta k+\beta+1}^{k+1}[-a\eta^{\beta}].$$

Подставляя найденные выражение в (15), получаем

$$w(\xi,\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \xi^{\alpha k+\alpha} E_{\alpha,\alpha k+\alpha+1}^{k+1}[-b\xi^{\alpha}] \eta^{\beta k+\beta} E_{\beta,\beta k+\beta+1}^{k+1}[-a\eta^{\beta}]. \tag{16}$$

Непосредственно проверяется, что равенство (16), действительно определяет функцию $w(\xi,\eta)$, которая является решением уравнения (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. *Пшибихова Р.А.*Краевая задача для обобщенного телеграфног уравнения с переменными коэффициентами // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2016. № 4-1 (16). С. 50-55.
3. *Пшибихова Р.А.* Задача Гурса для обобщенного телеграфного уравнения дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 6. С. 839-843.
4. *Пшибихова Р.А.* Задача Гурса для дробного телеграфного уравнения с производными Капуто // Математические заметки. 2016. Т. 99, вып. 4. С. 562-566.
5. *Еремин А.С.* Три задачи для одного уравнения в частных дробных производных // Математическое моделирование и краевые задачи. 2004. Т. 3. С.94-98.
6. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 4, ч.2. М.: Наука, 1981. 550 с.
7. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
8. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trijillo J.J.* Theory and application of fractional differential equations. Elsevier, 2006, 523 p.
9. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.
10. *Prabhakar T.R.* A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel // Yokohama Mathematical Journal, 1971, vol. 19, pp. 7-15.

ABSTRACT

In this paper, for a generalized telegraph equation with constant coefficients and two independent variables, we construct a solution to an analogue of the Goursat problem.

Keywords. The Riemann function, derivative of the Caputo, derivative of the Riemann – Liouville, Prabhakar function, telegraph equation.

Institute of Applied Mathematics and Automation, Nalchik
E-mail: niipma@mail333.com

АННОТАЦИЯ

В данной работе для обобщенного телеграфного уравнения с постоянными коэффициентами и двумя независимыми переменными строится решение аналога задачи Гурса.

Ключевые слова. Функция Римана, производная Капуто, производная Римана – Лиувилля, функция Прабхакара, телеграфное уравнение.

Институт прикладной математики и автоматизации, Нальчик
E-mail: niipma@mail333.com