# МАТЕМАТИКА
# MATHEMATICS

УДК 517.95 Научная статья
DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-2-11-20

## Разрешимость краевой задачи для смешанного уравнения четвертого порядка

**А. Б. Бекиев[1], Р. М. Шихиев[2]**
*Каракалпакский государственный университет имени Бердаха*
*г. Нукус, Узбекистан*
[1]*ashir1976@mail.ru,* [2]*raximm82@mail.ru*

**Аннотация.** Исследование краевых задач для уравнений в частных производных высоких порядков играют важную роль, потому что многие научно-практические исследования приводят к краевым задачам для уравнений в частных производных четвертого порядка. В данной работе в прямоугольной области для уравнения четвертого порядка рассмотрена краевая задача. Установлен критерий единственности и существования решения краевой задачи для уравнения четвертого порядка. Решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей спектральной задачи. Доказана устойчивость решения задачи.

**Ключевые слова:** уравнение четвертого порядка, краевая задача, единственность, существование, устойчивость

**Благодарности:** авторы выражают благодарность рецензентам за указанные замечания, которые позволили повысить качество статьи.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Для цитирования.** Бекиев А. Б., Шихиев Р. М. Разрешимость краевой задачи для смешанного уравнения четвертого порядка // Доклады АМАН. 2022. Т. 22, № 2. С. 11–20. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-2-11-20



MSC 32A10; 32A37 Original article

## Resolution of the boundary value problem for a mixed equation of the fourth order

**Ashirmet B. Bekiev[1], Rakhim M. Shikhiev[2]**
*Karakalpak State University named after Berdakh, Nukus, Uzbekistan*
[1]*ashir1976@mail.ru,* [2]*raximm82@mail.ru*

**Abstract.** The study of boundary value problems for high-order partial differential equations plays an important role, because many scientific and practical studies lead to boudary value problems for fourth-order partial differential equtions. In this work in a rectangular region for a fourth-order equation, a boundary value problem is considered. A criterion for the uniqueness and existence of a solution to a boundary value problem for a fourth-order equation is established. The solution is constructed as the sum of a series in terms of eigenfunctions of the corresponding spectral problem. The stability of the solution of this problem is proved.

**Keywords:** fourth-order equation, boundary value problem, uniqueness, existence, stability

**Acknowledgments:** the authors are thankful to the anonymous reviewer for his valuable remakes.

The authors declare no conflict of interest.

**For citation.** A. B. Bekiev, R. M. Shihiev Resolution of the boundary value problem for a mixed equation of the fourth order. Adyghe Int. Sci. J. 2022. Vol. 22, No. 2. P. 11–20. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-2-11-20



### Введение

Исследование краевых задач для уравнений в частных производных высоких порядков играют важную роль, потому что, многие научно-практические исследовании, приводят к краевым задачам для уравнений в частных производных четвертого порядка. Например, изучение задачи динамики одномерных течений, динамики сжимаемой экспоненциально стратифицированной жидкости, задачи распространения волн в диспергирующих средах, поперечные колебания стержня и балок и другие, сводятся к решению краевых задач для уравнения четвертого порядка.

В монографии [1] изучены вопросы классификации и приведения к каноническому виду линейных дифференциальных уравнений с частными производными четвертого порядка, а также поставлены и исследованы корректные краевые задачи для уравнений гиперболических и смешанных типов. В работе [2] рассмотрена разрешимость и спектральные свойства краевых задач для уравнений четного порядка. Краевые задачи для уравнения четвертого порядка ранее рассматривались в работах [3]-[10].

В данной работе рассмотрена краевая задача для уравнения четвертого порядка с локальными условиями. Корректность исследуемой задачи для уравнения с частными производными четвертого порядка устанавливается доказательством существования и единственности решения. Такие задачи для уравнений второго порядка исследованы в работах [11]-[14].

### Постановка задачи

Пусть в области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < p,\ \ -\alpha < t < \beta\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xxxx}(x,t) + b^2 u(x,t) + \mathrm{sgn}t \cdot [u_t(x,t) - u_{tt}(x,t)] = 0, \tag{1}$$

где $b$ - заданное число.

**Задача.** *Найти функцию $u(x,t)$ удовлетворяющий следующим условиям:*

$$u(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^{4,2}_{x,t}\left(\Omega_{+} \cup \Omega_{-}\right), \tag{2}$$

$$Lu\left(x,t\right)\equiv 0,\ \left(x,t\right)\in\Omega_{+}\cup\Omega_{-} \tag{3}$$

$$u\left(0,t\right)=0,\ \ u\left(p,t\right)=0,\ \ u_{xx}\left(0,t\right)=0,\ \ u_{xx}\left(p,t\right)=0,\ \ -\alpha\le t\le\beta, \tag{4}$$

$$u\left(x,\ \beta\right)=\varphi\left(x\right),\ u\left(x,\ -\alpha\right)=\psi\left(x\right),\ \ 0\le x\le p, \tag{5}$$

*где* $\Omega_{+}=\Omega\cap\{t>0\},\ \Omega_{-}=\Omega\cap\{t<0\}$ *и* $\varphi\left(x\right),\ \psi\left(x\right)$ *- заданные, достаточно гладкие функции, причем* $\varphi^{(2i)}\left(0\right)=\varphi^{(2i)}\left(p\right)=0,\ \psi^{(2i)}\left(0\right)=\psi^{(2i)}\left(p\right)=0,\ i=0,1.$

**Единственность решения**

Частные решения уравнения (1), не равные нулю в $\Omega$, будем искать в виде $u\left(x,t\right)= =X\left(x\right)T\left(t\right).$ Тогда имеем

$$X^{IV}\left(x\right)-\lambda^{4}X\left(x\right)=0,\ 0<x<p,\ \lambda=const, \tag{6}$$

$$X\left(0\right)=X\left(p\right)=X''\left(0\right)=X''\left(p\right)=0, \tag{7}$$

$$T''\left(t\right)-T'\left(t\right)-\left(\lambda^{4}+b^{2}\right)T\left(t\right)=0,\ \ 0<t<\beta, \tag{8}$$

$$T''\left(t\right)-T'\left(t\right)+\left(\lambda^{4}+b^{2}\right)T\left(t\right)=0,\ -\alpha<t<0. \tag{9}$$

Задача (6)-(7) имеет решение

$$X_{k}\left(x\right)=\sqrt{\frac{2}{p}}\sin\lambda_{k}x,\ \ \lambda_{k}=\frac{k\pi}{p},\ \ k=1,2,\dots\,. \tag{10}$$

Дифференциальные уравнения (8)-(9) имеют общие решения

$$T_{k}\left(t\right)=\begin{cases} e^{\frac{1}{2}t}\left(a_{k}e^{\frac{1}{2}v_{k}t}+b_{k}e^{-\frac{1}{2}v_{k}t}\right), & t>0,\\ e^{\frac{1}{2}t}\left(c_{k}\cos\frac{1}{2}\mu_{k}t+d_{k}\sin\frac{1}{2}\mu_{k}t\right), & t<0,\end{cases} \tag{11}$$

где $a_k$, $b_k$, $c_k$ и $d_k$ - пока неизвестные постоянные, $v_{k}=\sqrt{4\left(\lambda_{k}^{4}+b^{2}\right)+1}$, $\mu_{k}=\sqrt{4\left(\lambda_{k}^{4}+b^{2}\right)-1}$.

Постоянные $a_k$, $b_k$, $c_k$ и $d_k$ выберем так, чтобы выполнялись условия:

$$T_{k}\left(0-0\right)=T_{k}\left(0+0\right),\ T_{k}'\left(0-0\right)=T_{k}'\left(0+0\right). \tag{12}$$

Из (11) учитывая условия (12) имеем $c_{k}=a_{k}+b_{k}$, $d_{k}=\frac{v_{k}}{\mu_{k}}\left(a_{k}-b_{k}\right)$. Тогда функция (11) примет вид

$$T_{k}\left(t\right)=\begin{cases} e^{\frac{1}{2}t}\left(a_{k}e^{\frac{1}{2}v_{k}t}+b_{k}e^{-\frac{1}{2}v_{k}t}\right), & t>0,\\ \frac{e^{\frac{1}{2}t}}{\mu_{k}}\left(\mu_{k}\left(a_{k}+b_{k}\right)\cos\frac{1}{2}\mu_{k}t+v_{k}\left(a_{k}-b_{k}\right)\sin\frac{1}{2}\mu_{k}t\right), & t<0.\end{cases} \tag{13}$$

Пусть $u\left(x,t\right)$ - решение задачи (2)-(5). Следуя [13] рассмотрим функции

$$u_{k}\left(t\right)=\sqrt{\frac{2}{p}}\int\limits_{0}^{p}u\left(x,t\right)\sin\lambda_{k}xdx,\ \ k=1,2,\dots\,. \tag{14}$$

Предположим, что производная $u_{xxx}\left(x,t\right)$ решения $u\left(x,t\right)$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{x\to 0+0}u_{xxx}\left(x,t\right)\sin\lambda_{k}x=\lim_{x\to p-0}u_{xxx}\left(x,t\right)\sin\lambda_{k}x=0,\ \ \ -\alpha\le t\le\beta. \tag{15}$$

На основании (14) введем функции

$$u_{k,\varepsilon}(t)=\sqrt{\frac{2}{p}}\int\limits_{\varepsilon}^{p-\varepsilon}u(x,t)\sin\lambda_k x dx,\;\; k=1,2,... \tag{16}$$

где $\varepsilon>0$ достаточно малое число. Дифференцируя равенство (16) по $t$ два раза и, учитывая уравнение (1), имеем

$$u''_{k,\varepsilon}(t)=\sqrt{\frac{2}{p}}\int\limits_{\varepsilon}^{p-\varepsilon}u_{xxxx}(x,t)\sin\lambda_k x dx+b^2u_{k,\varepsilon}(t)+u'_{k,\varepsilon}(t),\;\; t>0, \tag{17}$$

$$u''_{k,\varepsilon}(t)=-\sqrt{\frac{2}{p}}\int\limits_{\varepsilon}^{p-\varepsilon}u_{xxxx}(x,t)\sin\lambda_k x dx-b^2u_{k,\varepsilon}(t)+u'_{k,\varepsilon}(t),\;\; t<0. \tag{18}$$

В (17) и (18), интегрируя интегралы по частям четыре раза и переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, имеем

$$u''_k(t)-u'_k(t)-\left(\lambda_k^4+b^2\right)u_k(t)=0,\;\; t>0, \tag{19}$$

$$u''_k(t)-u'_k(t)+\left(\lambda_k^4+b^2\right)u_k(t)=0,\;\; t<0. \tag{20}$$

Дифференциальные уравнения (19)-(20) совпадают соответственно с уравнениями (8)-(9) при $\lambda=\lambda_k$. Тогда $u_k(t)\equiv T_k(t)$ при $-\alpha\le t\le\beta$, т.е. $u_k(t)$ определяются по формуле (13). Для нахождения постоянных $a_k$ и $b_k$ используем условия

$$u_k(\beta)=\varphi_k,\;\; u_k(-\alpha)=\psi_k \tag{21}$$

где

$$\varphi_k=\sqrt{\frac{2}{p}}\int\limits_0^p\varphi(x)\sin\lambda_k x dx,\; \psi_k=\sqrt{\frac{2}{p}}\int\limits_0^p\psi(x)\sin\lambda_k x dx. \tag{22}$$

Тогда имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a_k e^{\frac{1}{2}v_k\beta}+b_k e^{-\frac{1}{2}v_k\beta}=\varphi_k e^{\frac{1}{2}\beta},\\ \mu_k(a_k+b_k)\cos\frac{1}{2}\mu_k\alpha-v_k(a_k-b_k)\,sin\frac{1}{2}\mu_k\alpha=\mu_k\psi_k e^{\frac{1}{2}\alpha}.\end{cases}$$

Определитель $\Delta_k(\alpha,\,\beta)$ этой системы равно

$$\bar{\Delta}_k(\alpha,\,\beta)=2\Delta_k(\alpha,\,\beta)=2\left[\mu_k\cos\frac{1}{2}\mu_k\alpha\cdot sh\frac{1}{2}v_k\beta+v_k sin\frac{1}{2}\mu_k\alpha\cdot ch\frac{1}{2}v_k\beta\right].$$

Если при всех $k\in N$

$$\Delta_k(\alpha,\beta)\ne 0, \tag{23}$$

то это система имеет единственное решение

$$\begin{aligned} a_k&=\tfrac{1}{2\Delta_k(\alpha,\beta)}\left[\varphi_k e^{-\frac{1}{2}\beta}\left(\mu_k\cos\tfrac{1}{2}\mu_k\alpha+v_k\sin\tfrac{1}{2}\mu_k\alpha\right)-\mu_k\psi_k e^{\frac{1}{2}\alpha}e^{-\frac{1}{2}v_k\beta}\right],\\ b_k&=\tfrac{1}{2\Delta_k(\alpha,\beta)}\left[\mu_k\psi_k e^{\frac{1}{2}\alpha}e^{\frac{1}{2}v_k\beta}-\varphi_k e^{-\frac{1}{2}\beta}\left(\mu_k\cos\tfrac{1}{2}\mu_k\alpha-v_k\sin\tfrac{1}{2}\mu_k\alpha\right)\right].\end{aligned}$$

Тогда решение уравнений (19)-(20), удовлетворяющее условиям (21) примет вид

$$u_k(t) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{2}t}}{\Delta_k(\alpha,\beta)} \left[ \varphi_k e^{-\frac{1}{2}\beta} \left( \mu_k \cos\frac{1}{2}\mu_k\alpha \cdot sh\frac{1}{2}v_k t + v_k sin\frac{1}{2}\mu_k\alpha \cdot ch\frac{1}{2}v_k t \right) + \right. \\ \left. \qquad + \mu_k \psi_k e^{\frac{1}{2}\alpha} sh\frac{1}{2}v_k(\beta - t) \right],\ t > 0, \\ \frac{e^{\frac{1}{2}t}}{\Delta_k(\alpha,\beta)} \left[ v_k \varphi_k e^{-\frac{1}{2}\beta} \sin\frac{1}{2}\mu_k(t+\alpha) + \right. \\ \left. \quad + \psi_k e^{\frac{1}{2}\alpha} \left( \mu_k sh\frac{1}{2}v_k\beta \cdot \cos\frac{1}{2}\mu_k t - v_k ch\frac{1}{2}v_k\beta \cdot \sin\frac{1}{2}\mu_k t \right) \right],\ t < 0. \end{cases} \tag{24}$$

Пусть при всех $k \in N$ выполнены условия (23) и $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$. Тогда $\varphi_k \equiv 0$, $\psi_k \equiv 0$ и при всех $t \in [-\alpha, \beta]$ из формул (14) и (24) имеем $\int_0^p u(x,t)\sin\lambda_k x dx = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ . Отсюда в силу полноты системы $\{\sin\lambda_k x\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $L_2[0,p]$ и непрерывности функции $u(x,t)$ в области $\bar{\Omega}$, следует что $u(x,t) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$.

Предположим, что при некоторых $p$, $\alpha$, $\beta$, $b$ и $k = l \in N$ нарушено условие (23), т.е. $\Delta_l(\alpha,\beta) = \mu_l \cos\frac{1}{2}\mu_l\alpha \cdot sh\frac{1}{2}v_l\beta + v_l sin\frac{1}{2}\mu_l\alpha \cdot ch\frac{1}{2}v_l\beta = 0$. Тогда задача (2)-(5) при $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$ имеет ненулевое решение

$$u_l(x,t) = \begin{cases} 2e^{\frac{1}{2}t} sh\frac{1}{2}v_l(\beta - t) X_l(x),\ t > 0, \\ 2\frac{e^{\frac{1}{2}t}}{\mu_l}\Delta_l(-t,\beta) X_l(x),\ t < 0, \end{cases}$$

где $\Delta_l(-t,\beta) = \mu_l sh\frac{1}{2}v_l\beta \cos\frac{1}{2}\mu_l t - v_l ch\frac{1}{2}v_l\beta sin\frac{1}{2}\mu_l t$.

Теперь $\Delta_k(\alpha,\beta)$ представляем в виде

$$\Delta_k(\alpha,\beta) = A_k \sin\left(\frac{1}{2}\mu_k\alpha + \gamma_k\right), \tag{25}$$

где $A_k = \sqrt{4(\lambda_k^4 + b^2)ch\mu_k\beta + 1}$, $\quad \gamma_k = \arcsin\frac{\mu_k sh\frac{1}{2}\mu_k\beta}{A_k}$. Из (25) следует, что при $\alpha = \frac{2}{\mu_k} \times$ $\times(m\pi - \gamma_k)$, $m, k \in N$ имеет место равенства $\Delta_k(\alpha,\beta) = 0$. При таких значениях $\alpha$ нарушается единственность решения задачи (2)-(5).

**Теорема 1.** *Если существует решение задачи (2)-(5), удовлетворяющее условиям (15), то оно единственно только тогда, когда выполнены условия (23) при всех $k \in N$.*

**Лемма 1.** *Если $\alpha$ иррациональное число, которая представляется в виде $\alpha = \frac{p^2 l}{\pi q}$, где $p, q, l \in N$, $(p^2 l, q) = 1$ и $(q, 4) = 1$, то при больших $k$ существует положительная постоянная $C_0$ такая, что справедлива следующая оценка*

$$|\Delta_k(\alpha,\beta)| \geq C_0 k^2 e^{\lambda_k^2\beta}. \tag{26}$$

**Доказательство.** Известно, что $\gamma_k \to \frac{\pi}{4}$ при $k \to \infty$. $\mu_k$ представим в виде $\mu_k = 2\left(\frac{k\pi}{p}\right)^2 \times$ $\times\bar{\mu}_k$, где $\bar{\mu}_k = \left[1 + B^2\left(\frac{k\pi}{p}\right)^{-4}\right]^{\frac{1}{2}}$, $B^2 = b^2 - \frac{1}{4}$. При условии $\frac{\sqrt{B}p}{\pi} < 1$ выражение $\bar{\mu}_k$ можно представить в виде

$$\bar{\mu}_k = 1 + \frac{1}{2}B^2\left(\frac{p}{k\pi}\right)^4 - \frac{1}{8}B^4\left(\frac{p}{k\pi}\right)^8 + \ldots = 1 + \theta_k, \tag{27}$$

где для остатка ряда $\theta_k$ справедлива

$$\frac{3}{8}B^2\Big(\frac{p}{k\pi}\Big)^4 < \theta_k < \frac{1}{2}B^2\Big(\frac{p}{k\pi}\Big)^4. \tag{28}$$

Учитывая (27), соотношение (25) принимает вид

$$\Delta_k\left(\alpha,\beta\right) = A_k \sin\left[\left(\frac{k\pi}{p}\right)^2\alpha + \left(\frac{k\pi}{p}\right)^2\theta_k\alpha + \gamma_k\right], \tag{29}$$

Пусть $\alpha$ - иррациональное число, представимое в виде $\frac{p^2 l}{\pi}$, $p$, $l \in N$. Тогда из (29) для всех $k$ имеем

$$\Delta_k\left(\alpha,\beta\right) = A_k \sin\left(k^2 l\pi + \bar{\theta}_k\alpha + \gamma_k\right) = A_k(-1)^{k^2 l}\sin\left(\bar{\theta}_k\alpha + \gamma_k\right), \tag{30}$$

где $\bar{\theta}_k = \left(\frac{k\pi}{p}\right)^2\theta_k$. В силу (28) $\bar{\theta}_k \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда существует число $k_2 \in N$ такое, что при всех $k > k_2$

$$0 < \bar{\theta}_k\frac{p^2 l}{\pi} + \gamma_k < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда в силу неравенства $\sin x > \frac{2}{\pi}x,\ \ 0 < x < \frac{\pi}{2}$ из (30) имеем $|\Delta_k\left(\alpha,\beta\right)| \geq A_k\frac{2}{\pi}\left|\bar{\theta}_k\frac{p^2 l}{\pi} + \right.$ $\left.+\gamma_k\right| \geq C_0^2 k^2 e^{\lambda_k^2\beta}$.

Пусть теперь, $\alpha = \frac{p^2 l}{\pi q}$, где $p, q,\ l \in N$. Разделим $k^2 l$ на $q$ с остатком: $k^2 l = sq + r$, $0 \leq r < q,\ s, r \in N_0$.

Тогда из (25) получаем:

$$\Delta_k\left(\alpha,\beta\right) = A_k(-1)^s \sin\left(\frac{r\pi}{q} + \frac{k^2 l\pi}{q}\bar{\theta}_k + \gamma_k\right). \tag{31}$$

Пусть $r = 0$. Тогда этот случай сводится к рассмотренную выше случаю.

Пусть $r > 0$. Тогда $1 \leq r < q,\ q \geq 2$.

Поскольку выражение $\bar{\Delta}_k\left(\alpha,\beta\right) = \sin\left(\frac{r\pi}{q} + \frac{k^2 l\pi}{q}\bar{\theta}_k + \gamma_k\right)$ имеет конечный предел при $k \to \infty$, то существует число $k_3 \in N$, такое, что при всех $k > k_3$ из (31) имеем $|\Delta_k\left(\alpha,\beta\right)| \geq$ $\geq C_0'\lambda_k^2 e^{\lambda_k^2\beta}\left|\sin\left(\frac{\pi r}{q} + \frac{\pi}{4}\right)\right| \geq C_0 k^2 e^{\lambda_k^2\beta}$.

Поскольку $q$ и 4 взаимно простые числа, то справедлива система (26). Лемма доказана.

**Существование решения задачи**

Пусть выполнены условия (23). Тогда частное решение задачи (2)-(5) ищем в виде суммы ряда Фурье

$$u\left(x,t\right) = \sqrt{\frac{2}{p}}\sum_{k=1}^{\infty} u_k\left(t\right)\sin\lambda_k x, \tag{32}$$

где $u_k\left(t\right)$ представляются в виде (23).

**Лемма 2.** *Пусть выполнено условие (23), тогда при всех $k \in N$ справедливы оценки*

$$\begin{gathered}
|u_k\left(t\right)| \leq \begin{cases} C_1\left(|\varphi_k| + |\psi_k|\right), & t > 0, \\ C_2\left(|\varphi_k| + |\psi_k|\right), & t < 0, \end{cases} \\
|u'_k\left(t\right)| \leq \begin{cases} C_3 k^2\left(|\varphi_k| + |\psi_k|\right), & t > 0, \\ C_4 k^2\left(|\varphi_k| + |\psi_k|\right), & t < 0, \end{cases} \\
|u''_k\left(t\right)| \leq \begin{cases} C_5 k^4\left(|\varphi_k| + |\psi_k|\right), & t > 0, \\ C_6 k^4\left(|\varphi_k| + |\psi_k|\right), & t < 0, \end{cases}
\end{gathered} \tag{33}$$

*здесь и далее $C_i$ – положительные константы.*

Справедливость оценок (33) непосредственно вытекает из (24), (26).

**Лемма 3.** *Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^5[0,p]$ и $\varphi^{(2i)}(0) = \varphi^{(2i)}(p) = 0$, $\psi^{(2i)}(0) = \psi^{(2i)}(p) = 0$, $i = 0,1,2$.*

*Тогда справедливы*

$$\varphi_k = \frac{1}{\lambda_k^5}\varphi_k^{(5)},\ \psi_k = \frac{1}{\lambda_k^5}\psi_k^{(5)} \tag{34}$$

*где*

$$\varphi_k^{(5)} = \sqrt{\frac{2}{p}}\int\limits_0^p \varphi^{(5)}(x)\cos\lambda_k x dx,\ \psi_k^{(5)} = \sqrt{\frac{2}{p}}\int\limits_0^p \psi^{(5)}(x)\cos\lambda_k x dx,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_k^{(5)}\right|^2 \le \int_0^p \left[\varphi^{(5)}(x)\right]^2 dx,\ \sum_{k=1}^{\infty}\left|\psi_k^{(5)}\right|^2 \le \int_0^p \left[\psi^{(5)}(x)\right]^2 dx\ .$$

**Доказательство.** В формуле (22) интегрируя по частям интеграл пять раз и учитывая условия леммы, получим (34). Лемма доказана.

Формально из ряда (32) почленно дифференцируя, составим ряды

$$u_t(x,t) = \sqrt{\frac{2}{p}}\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(t)\sin\lambda_k x, \tag{35}$$

$$u_{tt}(x,t) = \sqrt{\frac{2}{p}}\sum_{k=1}^{\infty} u''_k(t)\sin\lambda_k x, \tag{36}$$

$$u_{xxxx}(x,t) = \sqrt{\frac{2}{p}}\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^4 u_k(t)\sin\lambda_k x. \tag{37}$$

Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда ряд (32), (35), (36), (37) в замкнутой области $\bar{\Omega}$ при выполнении оценки (26), мажорируются числовым рядом

$$C_7\sum_{k=1}^{\infty} k^4\left(|\varphi_k| + |\psi_k|\right). \tag{38}$$

При выполнении условий леммы 3, ряд (38) оценивается сходящимся числовым рядом

$$C_7\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\left[\left|\varphi_k^{(5)}\right| + \left|\psi_k^{(5)}\right|\right]. \tag{39}$$

На основании сходимости ряда (39) в силу признака Вейерштрасса сходятся абсолютно и равномерно ряды (32), (35)-(37) в области $\bar{\Omega}$.

**Теорема 2.** *Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 3 и выполнено условие (26), то существует единственное решение задачи (2)-(5), которое определяется выражением (32).*

**Устойчивость решения задачи**

Введем следующие нормы:

$$\|u\,(x,t)\|_{L_2[0,p]} = \left(\int\limits_0^p |u\,(x,t)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},\ \ \|u\,(x,t)\|_{C\left(\bar{\Omega}_\pm\right)} = \max_{\bar{\Omega}_\pm} |u\,(x,t)|\,,$$

$$\|\varphi\,(x)\|_{L_2[0,p]} = \left(\int\limits_0^p |\varphi\,(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Теорема 3.** *Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда для решения задачи (2)-(5) справедливы оценки:*

$$\begin{array}{l} \|u\,(x,t)\|_{L_2} \le C_8 \left(\|\varphi\|_{L_2} + \|\psi\|_{L_2}\right),\ \ t>0,\\ \|u\,(x,t)\|_{L_2} \le C_9 \left(\|\varphi\|_{L_2} + \|\psi\|_{L_2}\right),\ \ t<0,\\ \|u\,(x,t)\|_{C\left(\bar{\Omega}_+\right)} \le C_{10} \left(\|\varphi\|_{W_2^1} + \|\psi\|_{W_2^1}\right),\ \ t>0,\\ \|u\,(x,t)\|_{C\left(\bar{\Omega}_-\right)} \le C_{11} \left(\|\varphi\|_{W_2^1} + \|\psi\|_{W_2^1}\right),\ \ t<0. \end{array}$$

**Доказательство.** Из (32), (24) и неравенств леммы 2 при $t>0$ имеем

$$\begin{array}{l} \|u\,(x,t)\|^2_{L_2[0,1]} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k^2\,(t) \le C_1^2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(|\varphi_k| + |\psi_k|\right)^2 \le 2C_1^2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(|\varphi_k|^2 + |\psi_k|^2\right) \le \\ \le 2C_1^2 \left(\|\varphi\,(x)\|^2_{L_2[0,p]} + \|\psi\,(x)\|^2_{L_2[0,p]}\right). \end{array}$$

Аналогично получается оценка при $t<0$.

Пусть $(x,t)$ – произвольная точка области $\bar{\Omega}$. Тогда используя формулы (32) к неравенствам леммы 2, имеем

$$|u\,(x,t)| \le \sqrt{\frac{2}{p}} C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left(|\varphi_k| + |\psi_k|\right). \tag{40}$$

Используя следующие представления

$$\varphi_k = \frac{1}{\lambda_k}\varphi_k^{(1)},\ \psi_k = \frac{1}{\lambda_k}\psi_k^{(1)},\ \varphi_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{p}}\int\limits_0^p \varphi'\,(x)\,cos\lambda_k x dx,\ \psi_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{p}}\int\limits_0^p \psi'\,(x)\,cos\lambda_k x dx$$

из (40) получим

$$\begin{array}{c} |u\,(x,t)| \le C_1 \sqrt{\frac{2}{p}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k}\left|\varphi_k^{(1)}\right| + \frac{1}{\lambda_k}\left|\psi_k^{(1)}\right|\right) \le \\ \le \sqrt{\frac{2}{p}} C_1 \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_k^{(1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\psi_k^{(1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \le C'_1 \left(\|\varphi'\|_{L_2} + \|\psi'\|_{L_2}\right) \le \\ \le C_{10} \left(\|\varphi\|_{W_2^1} + \|\psi\|_{W_2^1}\right). \end{array}$$

*Теорема доказана.*

**Список использованных источников**

1. *Джураев Т. Д., Сопуев А. С.* К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Ташкент. Фан. 2000. 144 с.
2. *Аманов Д.* Разрешимость и спектральные свойства краевых задач для уравнений четного порядка // Автореф. дис. докт. физ.- матем. наук. Ташкент. АН РУз. 2019. 64 с.
3. *Амиров Ш. Н., Кожанов А. И.* Глобальная разрешимость начально-краевых задач для некоторых нелинейных аналогов уравнения Буссинеска // Матем. заметки. 2016. Т. 99, № 2. С. 171–180. https://doi.org/10.4213/mzm10617
4. *Мегралиев Я. Т.* Обратная краевая задача для уравнения изгиба тонких пластинок с дополнительным интегральным условием // Дальневосточный математический журнал. 2013. Т. 13, № 1. С. 83–101.
5. *Мегралиев Я. Т., Велиева Б. К.* Обратная краевая задача для линеаризованного уравнения Бенни-Люка с нелокальными условиями // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2019. Т. 29, № 2. С. 166–182. https://doi.org/10.20537/vm190203
6. *Смирнов М. М.* Модельные уравнения смешанного типа четвертого порядка. Ленинград. 1972. 126 с.
7. *Телешова Л. А.* Обратные задачи для параболических уравнений высокого порядка // дис.... канд. физ.-матем. наук. Улан-Уде. 2017. 155 с.
8. *Юлдашев Т. К.* Об одном смешанном дифференциальном уравнении четвертого порядка // Известия Института математики и информатики. 2016. Т. 47, № 1. С. 119–128.
9. *Юлдашев Т. К.* Смешанное дифференциальное уравнение типа Буссинеска // Вест. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1, Мат. Физ. 2016. Т. 33, № 2. С. 13–26.
10. *Fayazov K. S., Khajiev I. O.* A nonlocal boundary value problem for a fourth order mixed type equation // Украiнский математичний вiсник. 2020. Т. 17, № 1. С. 30–40.
11. *Сабитов К. Б.* Начально-граничная и обратные задачи для неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического уравнения // Матем. заметки. 2017. Т. 102, вып. 3. С. 415–435. https://doi.org/10.4213/mzm11521
12. *Сабитов К. Б.* Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. М.: Наука, 2016. 272 с.
13. *Сабитов К. Б., Хаджи И. А.* Краевая задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с неизвестной правой частью // Известия вузов. Математика. 2011. № 5. С. 44–52.
14. *Юнусова Г. Р.* Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Вестник СамГУ-Естественнонаучная серия. 2011. № 8. С. 108–117.

Поступила 01.05.2022; одобрена после рецензирования 07.06.2022; принята к публикации 15.06.2022.

Об авторах:

**Бекиев Аширмет Бекиевич,** доцент кафедры прикладной математики и информатики Каракалпакского государственного университета имени Бердаха (61 2236047, г. Нукус, Узбекистан), кандидат физико-математических наук, ashir1976@mail.ru

**Шихиев Рахим Мухамметович,** ассистент кафедры прикладной математики и информатики Каракалпакского государственного университета имени Бердаха (61 2236047, г. Нукус, Узбекистан), raximm82@gmail.com

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

**References**


1. *T. D. Dzhuraev, A. S. Sopuev* K teorii differentsial'nykh uravnenii v chastnykh proizvodnykhchetvertogo poriadka [Theory of partial differential equations of fourth order]. Tashkent. Fan. 2000. 144.
2. *D. Amanov* Razreshimost' i spektral'nye svojstva kraevyh zadach dlya uravnenij chetnogo poryadka [Solvability and spectral properties of boundary value problems for equations of even order]. Avtoref. dis. dokt. fiz. - matem. nauk. Tashkent. AN RUz. 2019. 64.
3. *Sh. N. Amirov, A. I. Kozhanov* Global Solvability of Initial Boundary-Value Problems for Nonlinear Analogs of the Boussinesq Equation. Mat. Zametki, 99:2 (2016), 171–180; Math. Notes, 99:2 (2016), 183–191. https://doi.org/10.4213/mzm10617
4. *YA. T. Megraliev* Obratnaya kraevaya zadacha dlya uravneniya izgiba tonkih plastinok s dopolnitel'nym integral'nym usloviem [Inverse boundary value problem for the bending equation of thin plates with an additional integral condition]. Dal'nevostochnyj matematicheskij zhurnal. 13, No. 1. 2013. 83–101.
5. *Ya. T. Megraliev, B. K. Velieva* Inverse boundary value problem for the linearized Benney-Luke equation with nonlocal conditions. Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki. 29:2 (2019). 166–182. https://doi.org/10.20537/vm190203
6. *M. M. Smirnov* Model'noe uravnenie smeshannogo tipa chetvertogo porjadka [Modal equations of mixed type of the fourth order] Leningrad. Izd-vo LGU. 1972.
7. *L. A. Teleshova* Obratnye zadachi dlya parabolicheskih uravnenij vysokogo poryadka [Inverse problems for parabolic equations of higher order]. Dis. kand. fiz.-mat. nauk. Ulan-Ude. 2017. 155.
8. *T. K. Yuldashev* Ob odnom smeshannom differencial'nom uravnenii chetvertogo poryadka [On a mixed type fourth-order differential equation]. Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta. 47, No. 1. 2016. 119–128.
9. *T. K. Yuldashev* Mixed Boussinesq-type differential equation. Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1. Mathematica. Physica. 2016. No. 2(33). 13–26.
10. *K. S. Fayazov, I. O. Khajiev* A nonlocal boundary value problem for a fourth order mixed type equation. Ukrainskij matematichnij visnik. 17, No. 1. 2020. 30–40.
11. *K. B. Sabitov* Initial Boundary and Inverse Problems for the Inhomogeneous Equation of a Mixed Parabolic-Hyperbolic Equation. Mat. Zametki, 102:3 (2017). 415–435; Math. Notes, 102:3 (2017). 378–395. https://doi.org/10.4213/mzm11521
12. *K. B. Sabitov* Pryamye i obratnye zadachi dlya uravnenij smeshannogo parabolo-giperbolicheskogo tip [Direct and inverse problems for equations of mixed parabolic-hyperbolic type]. M.: Nauka, 2016. 272.
13. *K. B. Sabitov, I. A. Khadzhi* The boundary-value problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation with unknown right-hand side. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 2011. No. 5. 44–52; Russian Math. (Iz. VUZ). 55:5 (2011). 35–42.
14. *G. R. Yunusova* Nonlocal problems for the equation of the mixed parabolic-hyperbolic type. Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya. 2011. No. 8(89). 108–117.


Submitted 01.05.2022; approved after reviewing 07.06.2022; accepted for publication 15.06.2022.

About the authors:

**Ashirmet Bekievich Bekiev,** Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Karakalpak State University named after Berdakh (Nukus, 61 2236047, Uzbekistan), Candidate of Physical and Mathematical Sciences, ashir1976@mail.ru

**Rakhim Muhammetovich Shikhiyev,** Assistant of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Karakalpak State University named after Berdakh (Nukus, 61 2236047, Uzbekistan), raximm82@gmail.com

The authors have read and approved the final version of the manuscript.