УДК 517.58 Научная статья
DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-2-34-40

О некоторых свойствах одной специальной функции

Ф. Г. Хуштова
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН
г. Нальчик, Россия
khushtova@yandex.ru

Аннотация. В работе исследуются некоторые свойства одного частного случая специальной функции Фокса. В частности, получены формула автотрансформации, её интегральное представление при некоторых параметрах. Приводится формула преобразования Меллина. В терминах исследуемой функции ранее были выписаны решения краевых задач для дифференциального уравнения с оператором Бесселя, действующим по пространственной переменной, и частной производной дробного порядка по временной переменной. При доказательстве полученных результатов были использованы известные свойства гамма-функции Эйлера, функции Райта, свойства преобразования Меллина.

Ключевые слова: функция Фокса, функция Райта, гамма-функция Эйлера, преобразование Меллина, свёртка Меллина

Благодарности: автор выражает благодарность рецензентам за указанные замечания, которые позволили повысить качество статьи.

Для цитирования. Хуштова Ф. Г. О некоторых свойствах одной специальной функции // Доклады АМАН. 2022. Т. 22, № 2. С. 34–40. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-2-34-40

MSC 32A10; 32A37 Original article

On some properties of one special function

Fatima G. Khushtova
Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik, Russia
khushtova@yandex.ru

Abstract. In the paper, some properties of one particular case of the special Fox function are studied. In particular, an autotransformation formula and its integral representation for some parameters are obtained. The Mellin transform formula is given. In terms of the function under study, solutions to boundary value problems for a differential equation with a Bessel operator acting with respect to a spatial variable and a partial derivative of a fractional order with respect to a time variable were previously written out. When proving the results obtained, the well-known properties of the Euler gamma function, the Wright function, and the properties of the Mellin transform were used.

Keywords: Fox function, Wright function, Euler gamma function, Mellin transform, Mellin convolution

Acknowledgments: the author are thankful to the anonymous reviewer for his valuable remakes.

For citation. F. G. Khushtova On some properties of one special function. Adyghe Int. Sci. J. 2022. Vol. 22, No. 2. P. 34–40. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-2-34-40

Вспомогательные сведения

Далее в работе

$$\Gamma(z)=\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt, \quad \operatorname{Re} z>0, \tag{1}$$

– *гамма-функция Эйлера* [1, с. 5], [2, с. 15].

Имеют место формулы [1, с. 10], [2, с. 17]

$$\Gamma(s+n)=(s)_n\Gamma(s), \tag{2}$$

$$\Gamma(s+1-n)=\frac{(-1)^n\Gamma(s+1)}{(-s)_n}, \tag{3}$$

где $n=0,1,2,...$, $(s)_n$ – *символ Похгаммера*, определяемый равенствами

$$(s)_n=s(s+1)(s+2)...(s+n-1), \quad (s)_0=1. \tag{4}$$

Функция Райта. Функцией Райта называется функция, определяемая рядом [3], [4]

$$\phi\,(\rho,\delta;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!\,\Gamma(\rho k+\delta)}, \quad \rho>-1.$$

При $y\to\infty$ имеет место асимптотическое представление [4], [5]

$$\phi(-\rho,\delta;-y)=Y^{1/2-\rho}e^{-Y}\left\{\sum_{m=0}^{M-1}A_mY^{-m}+O\left(Y^{-M}\right)\right\}, \tag{5}$$

где $Y=(1-\rho)(\rho^\rho y)^{1/(1-\rho)}$, A_m – константы, зависящие от ρ и δ.

Известно [5], что если $0<\rho<1$, $\delta\geqslant 0$, то

$$y^{\delta-1}\phi\,(-\rho,\delta;-y^{-\rho})>0, \quad y>0. \tag{6}$$

Частный случай функции Фокса. Пусть $0<\rho\leqslant 2$, μ, σ и $r\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\sigma+r)/2\notin\mathbb{Z}$. Рассмотрим функцию

$$\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(z)=H_{2,3}^{2,1}\left[\frac{z^2}{4}\left|\begin{matrix}(1-\sigma/2,1),\,(\mu-\rho\sigma/2,\rho)\\(r/2,1),\,(1-\sigma/2,1),\,(-r/2,1)\end{matrix}\right.\right], \tag{7}$$

где $H_{2,3}^{2,1}[...]$ – *H-функция Фокса* [6]-[8].

Из интегрального представления функции Фокса [6, с. 528], [7, с. 1], [8, с. 2] следует интегральное представление

$$\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{i\infty}} \Theta(s) \left(\frac{z}{2}\right)^{-2s} ds, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{8}$$

где $L_{i\infty} = (\omega - i\infty, \omega + i\infty), \quad \omega_1 < \omega < \omega_2,$

$$\omega_1 = -\min\{\operatorname{Re} r/2, 1 - \operatorname{Re}\sigma/2\}, \quad \omega_2 = \operatorname{Re}\sigma/2, \tag{9}$$

$$\Theta(s) = \frac{\Gamma\left(r/2+s\right)\Gamma\left(1-\sigma/2+s\right)\Gamma\left(\sigma/2-s\right)}{\Gamma\left(\mu-\rho\,\sigma/2+\rho\, s\right)\Gamma\left(1+r/2-s\right)}. \tag{10}$$

Интеграл (8) абсолютно сходится, если:

$$\rho < 2,\ 0 \leqslant |\arg z| < \pi\left(1-\rho/2\right)/2,\ z \neq 0,$$

$$\rho = 2,\ \arg z = 0,\ \operatorname{Re}\left(\mu - \sigma\right) > 1/2,\ z \neq 0,$$

$$\rho < 2,\ 0 \leqslant |\arg z| = \pi\left(1-\rho/2\right)/2,\ \operatorname{Re}\mu - \rho\operatorname{Re}\sigma/2 > (2-\rho)\,\omega + 1/2,\ z \neq 0.$$

Основные результаты

В работе [9] получены формулы дифференцирования целого порядка и формула автотрансформации для функции (7). В работах [10], [11] терминах функции (7) выписаны решения первой и второй краевых задач в полуполосе для дифференциального уравнения с оператором Бесселя и частной производной дробного порядка. В этой работе докажем следующие свойства этой функции.

Свойство 1. *Имеет место формула*

$$\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,r+2n}(z) = (\mu - n\rho)\mathcal{J}_r^{\rho,\mu+1,r+2n}(z) + \frac{z\rho}{2}\mathcal{J}_{r-1}^{\rho,\mu-\rho+1,r+2n-1}(z), \quad n = 1, 2, ... \tag{11}$$

Доказательство. Из интегрального представления (8) имеем

$$\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,r+2n}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{i\infty}} \frac{\Gamma\left(r/2+s\right)\Gamma\left(1-r/2+s-n\right)\Gamma\left(r/2-s+n\right)}{\Gamma\left(\mu-n\rho-\rho\, r/2+\rho\, s\right)\Gamma\left(1+r/2-s\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-2s} ds. \tag{12}$$

Из формул (2) и (3) следует

$$\Gamma\left(1-r/2+s-n\right) = \frac{(-1)^{n-1}\Gamma\left(-r/2+s\right)}{(1+r/2-s)_{n-1}},$$

$$\Gamma\left(r/2-s+n\right) = \Gamma\left(1+r/2-s\right)\left(1+r/2-s\right)_{n-1}.$$

Подставляя последние выражения в (12), приходим к следующему

$$\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,r+2n}(z) = \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i} \int\limits_{L_{i\infty}} \frac{\Gamma\left(r/2+s\right)\Gamma\left(-r/2+s\right)}{\Gamma\left(\mu-n\rho-\rho\, r/2+\rho\, s\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-2s} ds.$$

Сделав в последнем интеграле замену $s = r/2 + t$, получим

$$\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,r+2n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-r} \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i} \int\limits_{L'_{i\infty}} \frac{\Gamma\left(r+t\right)\Gamma\left(t\right)}{\Gamma\left(\mu-n\rho+\rho\, t\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-2t} dt, \tag{13}$$

где $L'_{i\infty} = (\omega - i\infty, \omega + i\infty)$, $\omega > -\min\{\operatorname{Re} r, 0\}$.

Далее, из формулы (2) следует

$$(\mu - n\rho + \rho t)\,\Gamma\,(\mu - n\rho + \rho t) = \Gamma\,(\mu + 1 - n\rho + \rho t)\,.$$

Учитывая последнее и снова используя формулу (2), равенство (13) запишется в виде

$$\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,r+2n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-r} \frac{(-1)^{n-1}(\mu - n\rho)}{2\pi i} \int\limits_{L'_{i\infty}} \frac{\Gamma\,(r+t)\,\Gamma\,(t)}{\Gamma\,(\mu + 1 - n\rho + \rho\,t)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-2t} dt +$$

$$+ \left(\frac{z}{2}\right)^{-r} \frac{(-1)^{n-1}\rho}{2\pi i} \int\limits_{L'_{i\infty}} \frac{\Gamma\,(r+t)\,\Gamma\,(1+t)}{\Gamma\,(\mu + 1 - n\rho + \rho\,t)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-2t} dt. \tag{14}$$

Во втором интеграле сделаем замену $t = s - 1$. В итоге приходим к равенству

$$\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,r+2n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-r} \frac{(-1)^{n-1}(\mu - n\rho)}{2\pi i} \int\limits_{L'_{i\infty}} \frac{\Gamma\,(r+t)\,\Gamma\,(t)}{\Gamma\,(\mu + 1 - n\rho + \rho\,t)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-2t} dt +$$

$$+ \left(\frac{z}{2}\right)^{2-r} \frac{(-1)^{n-1}\rho}{2\pi i} \int\limits_{L''_{i\infty}} \frac{\Gamma\,(r - 1 + s)\,\Gamma\,(s)}{\Gamma\,(\mu - \rho + 1 - n\rho + \rho\,s)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-2s} ds, \tag{15}$$

где $L''_{i\infty} = (\omega - i\infty, \omega + i\infty)$, $\omega > -\min\{0, \operatorname{Re} r - 1\}$.

Сравнивая правую часть (15) с представлением (13), приходим к формуле (11).

Свойство 2. *Имеет место интегральное представление*

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{-r} \mathcal{J}_r^{\alpha,\mu+\alpha,r+2}(z) = \int\limits_0^\infty t^{-r-1} e^{-\frac{z^2}{4t}} \phi\,(-\alpha, \mu, -t)\,dt, \quad z > 0. \tag{16}$$

Доказательство. Прежде чем доказывать равенство (16), отметим, что интеграл, стоящий справа от него, сходится. В самом деле, при $t \to 0$ функция $\phi\,(-\alpha, \mu, -t)$ ограничена, а фунция $e^{z^2/(4t)}$ растёт быстрее, чем t^{-r-1}. Если же $t \to \infty$, то сходимость интеграла обеспечивает оценка (5).

Обозначив через J интеграл справа от равенства (16) и положив

$$\mathcal{K}_1(t) = e^{-t}, \quad \mathcal{K}_2(t) = t^{-r} \phi\,(-\alpha, \mu, -t)\,, \quad x = \frac{z^2}{4},$$

запишем его в виде свёртки Меллина [12, с. 6]

$$J = \int\limits_0^\infty \mathcal{K}_1\left(\frac{x}{t}\right) \mathcal{K}_2(t) \frac{dt}{t}, \quad x > 0.$$

Из строки 3.1 (1) §10 [12] найдём преобразование Меллина первой функции

$$\mathcal{K}_1^*(s) = \Gamma(s), \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Согласно свойству 1.4 §10 [12] и формуле (3.2.3) [13] преобразование Меллина второй функции есть

$$\mathcal{K}_2^*(s) = \frac{\Gamma(-r+s)}{\Gamma(\mu - \alpha r + \alpha s)}, \quad \operatorname{Re} s > r.$$

Перемножив образы $\mathcal{K}_i^*(s)$, $i = 1, 2$, придём к значению

$$\mathcal{K}^*(s) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(-r+s)}{\Gamma(\mu - \alpha r + \alpha s)}, \quad \operatorname{Re} s > \max\{r, 0\}.$$

Вычисляя прообраз функции $\mathcal{K}^*(s)$, получим значение интеграла

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{i\infty}} \frac{\Gamma(s)\Gamma(-r+s)}{\Gamma(\mu - \alpha r + \alpha s)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-2s} ds,$$

где $L_{i\infty} = (\omega - i\infty, \omega + i\infty)$, $\omega > \max\{r, 0\}$. Сделав замену $s = r + t$, находим

$$J = \left(\frac{z}{2}\right)^{-2r} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L'_{i\infty}} \frac{\Gamma(t)\Gamma(r+t)}{\Gamma(\mu + \alpha t)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-2t} dt,$$

где $L'_{i\infty} = (\omega - i\infty, \omega + i\infty)$, $\omega > -\min\{r, 0\}$. Сравнивая последнее представление с (13), приходим к равенству (16).

Следствие. Из (6) следует, что если $0 < \alpha < 1$, $\mu \geqslant 0$, то

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{-r} \mathcal{J}_r^{\alpha, \mu+\alpha, r+2}(z) > 0, \quad z > 0.$$

Свойство 3. *Пусть* $\rho \leqslant 2$ *и* $s \in \mathbb{C}$ *такое, что* $\omega_1 < \mathrm{Re}\, s < \omega_2$, *где* ω_1 *и* ω_2 *определяются из* (9). *Пусть, кроме того,* $\mathrm{Re}\,(\mu - \sigma) > 1/2$ *при* $\rho = 2$. *Тогда имеет место равенство*

$$\int\limits_0^\infty z^{s-1} \mathcal{J}_r^{\rho, \mu, \sigma}(z)\, dz = 2^{s-1} \Theta\left(s/2\right), \tag{17}$$

где $\Theta(s)$ *определяется из* (10).

Доказательство. Формула (17) следует из представления (7) и более общей формулы преобразования Меллина H-функции Фокса [7, с. 43].

Заключение

Для одного частного случая функции Фокса получена формула автотрансформации. При некоторых параметрах исследуемой функции получено её интегральное представление. Приводится формула преобразования Меллина.

Список использованных источников

1. *Кузнецов Д. С.* Специальные функции. М.: Высшая школа, 1962. 248 с.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. I. М.: Наука, 1965. 296 с.
3. *Wright E. M.* On the coefficients of power series having exponential singularities // Journal of the London Mathematical Society. 1933. V. s1-8, No. 1. pp. 71–79.

4. *Wright E. M.* The generalized Bessel function of order greater than one // The Quarterly Journal of Mathematics. 1940. V. os-11. № 1. pp. 36–48.
5. *Stanković B.* On The Function Of E.M. Wright // Publications de l'Institut Mathématique. 1970. V. 10 (24). pp. 113–124.
6. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 3. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986. 800 с.
7. *Kilbas A. A., Saigo M.* H-Transform. Theory and Applications. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, London, New York and Washington, D.C. 2004. 389 p.
8. *Mathai A. M., Saxena R. K., Haubold H. J.* The H-function. Theory and Applications. Springer, 2010. 270 p.
9. *Хуштова Ф. Г.* Формулы дифференцирования и формула автотрансформации для одного частного случая функции Фокса// Доклады АМАН. 2020. Т. 20, № 4. С. 15–18.
10. *Хуштова Ф. Г.* Первая краевая задача в полуполосе для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и производной Римана–Лиувилля // Математические заметки. 2016. Т. 99, вып. 6. С. 921-928.
11. *Хуштова Ф. Г.* Вторая краевая задача в полуполосе для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и частной производной Римана–Лиувилля // Математические заметки. 2018. Т. 103, вып. 3. С. 460-470.
12. *Маричев О. И.* Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул). Мн.: Наука и техника, 1978. 312 с.
13. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.

Поступила 24.06.2022; одобрена после рецензирования 01.07.2022; принята к публикации 04.07.2022.

Об авторе:

Хуштова Фатима Гидовна, научный сотрудник отдела Дробного исчисления Института прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, (360017, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова 89 А), к.ф.-м.н., http://orcid.org/0000-0003-4088-3621, khushtova@yandex.ru

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

References

1. *D. S. Kuznecov* Special'nye funkcii. M.: Vysshaja shkola, 1962. 248 p.
2. *G. Bejtmen, A. Jerdeji* Vysshie transcendentnye funkcii. T. I. M.: Nauka, 1965. 296 p.
3. *E. M. Wright* On the coefficients of power series having exponential singularities. Journal of the London Mathematical Society. 1933. V. 8, No. 1. 71–79.
4. *E. M. Wright* The generalized Bessel function of order greater than one. The Quarterly Journal of Mathematics. 1940. V. os-11, No. 1, pp. 36–48.
5. *B. Stanković* On the function of E. M. Wright. Publications de l Institut Mathematique. 1970. V. 10 (24). pp. 113–124.
6. *A. P. Prudnikov, Ju. A. Brychkov, O. I. Marichev* Integraly i rjady. T. 3. Dopolnitel'nye glavy. M.: Nauka, 1986. 800 p.
7. *A. A. Kilbas, M. Saigo* H-Transform. Theory and Applications. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, London, New York and Washington, D.C. 2004, 389 p.

8. *A. M. Mathai, R. K. Saxena, H. J. Haubold* The H-function. Theory and Applications. Springer. New York, 2010. 270 p.
9. *F. G. Khushtova* Formuly differentsirovaniya i formula avtotransformatsii dlya odnogo chastnogo sluchaya funktsii Foksa. Doklady AMAN. 2020. T. 20, No. 4. pp. 15-18.
10. *F. G. Khushtova* Pervaya kraevaya zadacha v polupolose dlya uravneniya parabolicheskogo tipa s operatorom Besselya i proizvodnoy Rimana–Liuvillya. Matematicheskie zametki. 2016. T. 99, vyp. 6. pp. 921–928.
11. *F. G. Khushtova* Vtoraya kraevaya zadacha v polupolose dlya uravneniya parabolicheskogo tipa s operatorom Besselya i chastnoy proizvodnoy Rimana–Liuvillya. Matematicheskie zametki. 2018. T. 103, vyp. 3. pp. 460–470.
12. *O. I. Marichev* Metod vychisleniya integralov ot spetsial'nykh funktsiy (teoriya i tablitsy formul). Mn.: Nauka i tekhnika, 1978. 312 p.
13. *A. V. Pskhu* Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka. M.: Nauka, 2005. 199 p.

Submitted 24.06.2022; approved after reviewing 01.07.2022; accepted for publication 04.07.2022.

About the author:

Fatima Gidovna Khushtova, Researcher of Department of Fractional Calculus, Institute of Applied Mathematics and Automation of KBSC RAS, (360017, 89 A Shortanova St., Nalchik, Russia), Ph.D., http://orcid.org/0000-0003-4088-3621, khushtova@yandex.ru

The author has read and approved the final version of the manuscript.