УДК 517.95 Научная статья
DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-2-29-33

Об одной смешанной задаче для неоднородного уравнения Аллера

Р. Х. Макаова
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН
г. Нальчик, Россия
makaova.ruzanna@mail.ru

Аннотация. Для неоднородного уравнения Аллера исследована смешанная краевая задача. Доказана теорема существования и единственности регулярного решения. Выписан явный вид регулярного решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: неоднородное уравнение Аллера, смешанная задача, регулярное решение, метод Фурье

Благодарности: автор выражает благодарность рецензентам за указанные замечания, которые позволили повысить качество статьи.

Для цитирования. Макаова Р. Х. Об одной смешанной задаче для неоднородного уравнения Аллера // Доклады АМАН. 2022. Т. 22, № 2. С. 29–33. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-2-29-33

MSC 35L25 Original article

About one mixed problem for the inhomogeneous Hallaire equation

Ruzanna Kh. Makaova
Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik, Russia
makaova.ruzanna@mail.ru

Abstract. For the inhomogeneous Hallaire equation, a mixed boundary value problem is studied. The existence and uniqueness theorem for a regular solution is proved. An explicit form of the regular solution of the problem under study is written out.

Keywords: inhomogeneous Hallaire equation, mixed problem, regular solution, Fourier method

Acknowledgments: the author are thankful to the anonymous reviewer for his valuable remakes.

For citation. R. Kh. Makaova About one mixed problem for the inhomogeneous Hallaire equation. Adyghe Int. Sci. J. 2022. Vol. 22, No. 2. P. 29–33. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-2-29-33

В последнее время большой практический и теоретический интерес вызывают исследования локальных, нелокальных и смешанных задач для гиперболических уравнений третьего порядка. В данной работе ставится и исследуется вопрос однозначной разрешимости одной смешанной задачи для неоднородного уравнения Аллера.

В прямоугольной области $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < r, 0 < y < T\}$ рассматривается неоднородное уравнение Аллера [1]

$$\frac{\partial u}{\partial y} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + f(x,y), \tag{1}$$

где a, b – заданные положительные числа; $u = u(x,y)$ – искомая действительная функция независимых переменных x и y; $f(x,y)$ – известная функция.

Уравнение (1) является уравнением третьего порядка гиперболического типа [2, с. 255], хотя его относят к уравнениям псевдопараболического типа [3]. В работах [4]–[9] для уравнений третьего порядка псевдопараболического типа, в частности, и для уравнения Аллера исследованы различные локальные, нелокальные и смешанные краевые задачи.

Регулярным в области Ω решением уравнения (2) назовем функцию $u = u(x,y)$ такую, что $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, u_{xx}, $u_{xxy} \in C(\Omega)$ и удовлетворяющую уравнению (1).

Исследуется следующая

Задача. *Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию*

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le r, \tag{2}$$

и граничным условиям

$$u_x(0,y) = u(r,y) = 0, \quad 0 \le y < T. \tag{3}$$

Доказана следующая

Теорема. *Пусть функция $f(x,y) \in C^1(\bar{\Omega})$ и имеет кусочно непрерывную производную второго порядка в Ω и, кроме того, $f_x(0,y) = f(r,y) = 0$, а также пусть функция $\varphi(x) \in C^3[0,r]$ и имеет кусочно непрерывную производную четвертого порядка на $[0,r]$ и, кроме того, $\varphi''(r) = \varphi'''(0) = 0$. Тогда задача (2)-(3) для уравнения (1) имеет и притом единственное регулярное решение.*

Действительно, нетривиальное решение задачи (2)-(3) для однородного уравнения Аллера из (1) будем искать в виде $u(x,y) = X(x)Y(y)$, где $X(x)$ - функция только переменного x, $Y(y)$ - функция только переменного y.

Подставляя предполагаемую форму решения в уравнение (1) при $f(x,y) = 0$, получим следующее равенство

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{aX''}{X - bX''} = -\lambda, \quad \lambda > 0 = const. \tag{4}$$

Тогда, для определения функции $X(x)$ из (4), с учетом граничных условий (3), приходим к следующей задаче на собственные значения:

$$X'' + \mu X = 0, \quad \mu = \frac{\lambda}{a - b\lambda}, \tag{5}$$

$$X'(0) = X(r) = 0, \quad 0 \le x \le r. \tag{6}$$

При $\mu \leq 0$ задача (5), (6) имеет только тривиальное решение $X(x) \equiv 0$. Пусть $\mu > 0$. Тогда нетривиальные решения задачи (5), (6) возможны лишь при значениях

$$\mu_n = \left[\frac{\pi(1+2n)}{2r}\right]^2, \ n = 0, 1, 2, \dots .$$

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$X_n(x) = C_n cos(\sqrt{\mu_n}x), \ C_n = const.$$

Решение неоднородного уравнения Аллера (1) будем искать в виде ряда Фурье по собственным функциям задачи (5), (6):

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(y) cos(\sqrt{\mu_n}x), \quad \mu_n = \left[\frac{\pi(1+2n)}{2r}\right]^2, \tag{7}$$

где $Y_n(y)$ - пока неизвестные достаточно гладкие функции.

В силу условий теоремы функции $f(x,y)$ и $\varphi(x)$ можно разложить в равномерно сходящиеся ряды Фурье по полной ортогональной системе собственных функций задачи (5), (6) следующим образом соответственно:

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(y) cos(\sqrt{\mu_n}x), \tag{8}$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n cos(\sqrt{\mu_n}x), \tag{9}$$

где

$$f_n(y) = \frac{2}{r}\int_0^r f(\xi,y) cos(\sqrt{\mu_n}\xi) d\xi, \ \varphi_n = \frac{2}{r}\int_0^r \varphi(\xi) cos(\sqrt{\mu_n}\xi) d\xi, \ \mu_n = \left[\frac{\pi(1+2n)}{2r}\right]^2.$$

Из (1) и (2), с учетом формул (7)-(9), приходим к следующей задаче относительно искомой функции $Y_n(y)$:

$$(1 + b\mu_n)Y_n'(y) + a\mu_n Y_n(y) = f_n(y),$$
$$Y_n(0) = \varphi_n, \ n = 0, 1, 2, ...,$$

решение которого выписывается по формуле

$$Y_n(y) = \frac{1}{1+b\mu_n}\int_0^y e^{-\frac{a\mu_n}{1+b\mu_n}(y-\eta)} f_n(\eta) d\eta + \varphi_n e^{-\frac{a\mu_n}{1+b\mu_n}y}. \tag{10}$$

Подставив представление (10), из (7) с учетом условия согласования $\varphi'(0) = \varphi(r) = 0$ решение задачи (2), (3) для уравнения (1) можно выписать по формуле

$$u(x,y) = \int_0^y \int_0^r G(x,y;\xi,\eta) f(\xi,\eta) d\xi d\eta + \int_0^r G(x,y;\xi,0)[\varphi(\xi) - b\varphi''(\xi)] d\xi, \tag{11}$$

где

$$G(x,y;\xi,\eta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{r(1+b\mu_n)}e^{-\frac{a\mu_n}{1+b\mu_n}(y-\eta)}cos(\sqrt{\mu_n}x)cos(\sqrt{\mu_n}\xi),\ \mu_n=\left[\frac{\pi(1+2n)}{2r}\right]^2. \quad (12)$$

Решение (11) сходится равномерно, так как функция $G(x,y;\xi,\eta)$ при всех $y-\eta\geq 0$ является рядом, который мажорируется абсолютно сходящимся числовым рядом $M\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4r^2+b\pi^2(1+2n)^2}$. Из (12) непосредственно видно, что и ряд для $u_y(x,y)$ равномерно сходится. Учитывая условия на функции $f(x,y)$ и $\varphi(x)$ теоремы, а также то, что $G(x,y;\xi,\eta)=G(\xi,y;x,\eta)$ и $G_x(0,y;\xi,\eta)=G(r,y;\xi,\eta)=0$, из (11) получаем

$$u_{xx}(x,y)=\int_0^y\int_0^r G_{\xi\xi}(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta+\int_0^r G_{\xi\xi}(x,y;\xi,0)[\varphi(\xi)-b\varphi''(\xi)]d\xi=$$

$$=\int_0^y\int_0^r G(x,y;\xi,\eta)f_{\xi\xi}(\xi,\eta)d\xi d\eta+\int_0^r G(x,y;\xi,0)[\varphi''(\xi)-b\varphi^{IV}(\xi)]d\xi,$$

$$u_{xxy}(x,y)=\int_0^r G(x,y;\xi,y)f_{\xi\xi}(\xi,y)d\xi+\int_0^y\int_0^r G_y(x,y;\xi,\eta)f_{\xi\xi}(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$

$$+\int_0^r G_y(x,y;\xi,0)[\varphi''(\xi)-b\varphi^{IV}(\xi)]d\xi.$$

Таким образом, если выполнены дополнительные условия гладкости относительно функции $f(x,y)$ и $\varphi(x)$, формула (11) дает регулярное решение задачи (2)-(3) для уравнения (1).

Заметим, что исследуемая задача, когда краевые условия (3) неоднородные:

$$u(r,y)=\tau_r(y),\quad u_x(0,y)=\nu(y),$$

где $\tau_r(y)$, $\nu(y)$ – заданные достаточно гладкие функции, путем замены $U(x,y)=u(x,y)-$ $-\tau_r(y)+(r-x)\nu(y)$ сводится к аналогичной задаче рассмотренной выше.

Список использованных источников

1. *Hallaire M.* L'eau et la productions vegetable. Institut National de la Recherche Agronomique. 1964. Vol. 9.
2. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.
3. *Showalter R. E., Ting T. W.* Pseudoparabolic partial differential equations. SIAM J. Math. Anal. 1970. Vol. 1, No. 1. P. 1–26.
4. *Colton D.* Pseudoparabolic Equations in One Space Variable. Journal of Differ. Equations. 1972. Vol. 12, No. 3. P. 559–565.
5. *Шхануков М. Х.* О некоторых краевых задачах для уравнений третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 4. С. 689–699.

6. *Водахова В. А.* Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 18. С. 280–285.
7. *Макаова Р. Х.* Вторая краевая задача для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана–Лиувилля // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т. 17, № 3. С. 35–38.
8. *Макаова Р. Х.* Первая краевая задача в нелокальной постановке для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана-Лиувилля // Вестник АГУ. Серия 4: Естественно-математические и технические науки. 2017. Т. 4, № 211. С. 36–41.
9. *Макаова Р. Х.* Смешанная задача для неоднородного уравнения Аллера // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2021. Т. 21, № 4. С. 18–21.

Поступила 24.06.2022; одобрена после рецензирования 28.06.2022; принята к публикации 04.07.2022.

Об авторе:

Макаова Рузанна Хасанбиевна, младший научный сотрудник отдела уравнений смешанного типа Института прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН (360017, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова 89 А), ORCID: https://orcid.org/ 0000-0003-4095-2332, makaova.ruzanna@mail.ru

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

References

1. *M. Hallaire* L'eau et la productions vegetable. Institut National de la Recherche Agronomique. 1964. Vol. 9.
2. *A. M. Nakhushev* Zadachi so smeshcheniem dlya uravnenij v chastnyh proizvodnyh [Problems with displacement for partial differential equations]. M.: Nauka, 2006. 287 p.
3. *R. E. Showalter, T. W. Ting* Pseudoparabolic partial differential equations. SIAM J. Math. Anal. 1970. Vol. 1, No. 1. P. 1–26.
4. *D. Colton* Pseudoparabolic Equations in One Space Variable. Journal of Differ. Equations. 1972. Vol. 12, no. 3. P. 559–565.
5. *M. Kh. Shkhanukov* Some boundary value problems for a third-order equation that arise in the modeling of the filtration of a fluid in porous media. Differ. Uravn. 1982. Vol. 18, No. 4. P. 689–699.
6. *V. A. Vogahova* A boundary value problem with A. M. Nakhushev's nonlocal condition for a pseudoparabolic equation of moisture transfer. Differ. Uravn. 1982. Vol. 18, No. 18. P. 280–285.
7. *R. Kh. Makaova* The second boundary value problem for the generalized Hallaire equation with Riemann-Liouville fractional derivative. Reports AIAS. 2015. Vol. 17, No. 3. P. 35–38.
8. *R. Kh. Makaova* Tte first boundary value problem ib a nonlocal setting for the generalized Hallaire equation with Riemann-Liouville fractional derivative. Bulletin of the Adyghe State University. Series "Natural-mathematical and technical sciences". 2017. Vol. 4, No. 211. P. 36–41.
9. *R. Kh. Makaova* Mixed problem for the inhomogeneous Hallaire equation. Reports AIAS. 2021. Vol. 21, No. 4. P. 18–21.

Submitted 24.06.2022; approved after reviewing 28.06.2022; accepted for publication 04.07.2022.

About the author:

Ruzanna Khasanbievna Makaova, Junior Researcher of department Mixed type equations of Institute of Applied Mathematics and Automation of KBSC RAS (360017, 89 A Shortanova St., Nalchik, Russia), ORCID: https://orcid.org/ 0000-0003-4095-2332, makaova.ruzanna@mail.ru

The author has read and approved the final version of the manuscript.