

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ MATHEMATICAL MODELING

УДК 519.85; 519.17

Научная статья

DOI: <https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-4-39-56>

Компьютерное проектирование больших трубопроводных сетей высокого ранга оптимальности

М. Б. Абазоков¹, М. А. Багов², В. Ч. Кудаев³*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН
г. Нальчик, Россия*¹*Abazokov.Mukhammed@yandex.ru*, ²*maratniipma@mail.ru*, ³*vchkudaev@mail.ru*

Аннотация. В работе представлен метод компьютерного проектирования трубопроводных гидравлических сетей высокого ранга оптимальности. Метод основан на разделении задачи синтеза сети на две фазы, что снижает размерность задачи синтеза. Это обеспечивает возможность компьютерного проектирования сетей высокого ранга оптимальности. Метод предназначен для использования в автоматизированном проектировании больших трубопроводных сетей регионального и межрегионального водоснабжения.

Ключевые слова: Поточковая сеть, задача синтеза, разделение на подзадачи, снижение размерности, ранг экстремума, ранговая оптимизация

Благодарности: авторы выражают благодарность рецензентам за указанные замечания, которые позволили повысить качество статьи.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования. Абазоков М. Б., Багов М. А., Кудаев В. Ч. Компьютерное проектирование больших трубопроводных сетей высокого ранга оптимальности // Доклады АМАН. 2022. Т. 22, № 4. С. 39–56. DOI: <https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-4-39-56>

© Абазоков М. Б.,
Багов М. А.,
Кудаев В. Ч., 2022

MSC 05C85, 05C21, 90C25, 90C39

Original article

Higher-ranked optimal large pipeline networks design

Mukhammed B. Abazokov¹, Marat A. Bagov², Valery Ch. Kudaev³
*Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik, Russia*¹*Abazokov.Mukhammed@yandex.ru*, ²*maratniipma@mail.ru*, ³*vchkudaev@mail.ru*

Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Abstract. The paper presents a computer-aided optimal design of hydraulic systems. The method is based on dividing the network synthesis problem into two stages resulting in a dimensional reduction. This allows the optimal networks design of the higher rank. The proposed technique is intended for automated design of large pipeline networks for rural and interregional water supply.

Keywords: Flow network, synthesis problem, division into subtasks, dimensional reduction, extremum rank, rank optimization

Acknowledgments: the authors are thankful to the anonymous reviewer for his valuable remarks.

The authors declare no conflict of interest.

For citation. *M. B. Abazokov, M. A. Bagov, V. Ch. Kudaev* Higher-ranked optimal large pipeline networks design. *Adyge Int. Sci. J.* 2022. Vol. 22, No. 4. P. 39–56.

DOI: <https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-4-39-56>

© Abazokov M. B.,
Bagov M. A.,
Kudaev V. Ch., 2022

1. Постановка задачи синтеза разветвленной потоковой сети

Задача синтеза состоит в следующем:

$$z(x) = \sum_{ij \in D} c_{ij}(x_{ij})l_{ij} \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\sum_{i \in \Gamma_j^+} x_{ij} - \sum_{k \in \Gamma_j^-} x_{jk} = g_i, \quad \forall j \neq 1 \in B, \quad (2)$$

$$\sum_{j \in \Gamma_j^-} x_{1j} = Q, \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in D, \quad (4)$$

где $\Gamma(B, D)$ – заданный избыточный граф возможных соединений вершин сети; B и D – множества его вершин и дуг; x_{ij} , c_{ij} , l_{ij} – искомое значение величины потока, заданные удельная стоимость и длина (i, j) -й дуги; Q – заданный поток в сеть; g_i – заданный расход потока в i -м узле сети. Γ_j^+ и Γ_j^- – множества дуг, входящих и исходящих из узла j .

Функция $c_{ij}(x_{ij})$ для $\forall (i, j) \in D$ является гладкой и строго вогнутой. Вследствие этого локальный и глобальный экстремумы задачи могут достигаться только в вершинах транспортного многогранника (2) – (4). Задача является существенно многоэкстремальной. Недостатки существующих методов [1] – [3] рассмотрены в монографии [4, с. 114–123]. Основным же недостатком состоит в том, что уже при $n > 80$ (где n – количество узлов сети) существующие методы решения задачи не срабатывают.

2. Ранги экстремумов

Для существенно многоэкстремальных задач большой размерности локальный экстремум не информативен.

Определение 1. Точкой экстремума P -го ранга задачи (1) – (4) назовем такую угловую точку $\{x_{ij}^*\}_{ij \in D}$ транспортного многогранника (2) – (4), которая является точкой

глобального минимума на выпуклой линейной комбинации вершин многогранника, P -достижимых из этой точки.

Как известно, любой точке (вершине) транспортного многогранника соответствует базисное решение.

Переведем определение 1 на язык теории сетей.

Определение 2. P -фрагментом сети назовем замыкаемые любыми P хордами графа $\Gamma(B, D)$ P контуров на текущем остовном дереве T графа $\Gamma(B, D)$.

Теорема. (условие ранговой оптимальности для сетевой задачи).

Для того, чтобы решение $\{x_{ij}^*\}_{ij \in D}$, где $x_{ij} = 0, \forall (i, j) \notin T$ задачи (1) – (4) было экстремумом P -го ранга, необходимо и достаточно, чтобы оно было оптимально по всем фрагментам P -го ранга $\Phi_{T,P}$ на T , т.е.

$$\sum_{ij \in \Phi_{T,P}} c_{ij}(x_{ij}^*)l_{ij} \leq \sum_{ij \in D} c_{ij}(x_{ij})l_{ij},$$

где $\{x_{ij}\}_{ij \in D}$ – любое допустимое решение задачи, но такое, что $x_{ij} = x_{ij}^* \forall (i, j) \notin \Phi_{T,P}$.

Доказательство теоремы приведено в работе [5].

Условие ранговой оптимальности является конкретизацией системного принципа оптимальности: "Любая часть оптимальной системы оптимальна (при фиксации граничных условий с остальной сетью)".

Метод ранговой оптимизации сетевых систем состоит в сведении оптимизации сети к оптимизации ее фрагментов всё более высокого ранга. При этом рассмотрение только связных P -фрагментов позволяет существенно снизить размерность задачи.

Метод ранговой оптимизации всей потоковой сети представлен в работах [5] – [7].

3. Кустовая оптимизация потоковых сетей

Кустовая оптимизация потоковых сетей представлена в нашей работе [8]. Изложим здесь её суть.

Обозначим через T_n^P время компьютерного проектирования с n -вершиной разветвленной потоковой сети P -го ранга оптимальности на заданном избыточном базовом графе (БГ) возможных соединений её вершин друг с другом.

Покажем, что T_n^P имеет экспоненциальный рост по P .

Поскольку при оптимизации осуществляется направленный перебор связных P -фрагментов сети, т.е. фрагментов образуемых внесением в текущую оптимизированную сеть любых P хорд БГ и удалением из сети встречных им дуг, то $T_n^P = \eta C_n^P$, где η – постоянный коэффициент, доля связанных P -фрагментов сети умноженная на среднее время вычисления стоимости одного P -фрагмента. Получим

$$\frac{T_n^{P+1}}{T_n^P} = \frac{C_n^{P+1}}{C_n^P} = \frac{n-P}{P+1}, \quad \frac{T_n^{P+2}}{T_n^P} = \frac{(n-P-1)(n-P-2)}{(P+1)(P+2)} \dots$$

В общем случае, получим:

$$\frac{T_n^{P+k}}{T_n^P} = \left(\frac{n-P-k+1}{P+1} \right) \left(\frac{n-P-k+2}{P+2} \right) \dots \left(\frac{n-P-1}{P+k-1} \right) \left(\frac{n-P}{P+k} \right).$$

Выбрав наименьший сомножитель числителя и наибольший знаменателя, получим

$$\frac{T_n^{P+k}}{T_n^P} > \left(\frac{n-P-k+1}{P+k} \right)^k.$$

Поскольку для больших сетей $p, k \ll n$, получим

$$\frac{T_n^{P+k}}{T_n^P} \sim O\left(\left(\frac{n}{P+k}\right)^k\right). \quad (5)$$

Пусть T – заданное время решения задачи синтеза на ЭВМ. Выделим время $T/2$ на решение задачи методом ранговой оптимизации всей сети. Пусть за это время на компьютере построена сеть P -го ранга. Тогда в силу (5) за оставшееся время $T/2$ не может быть построена сеть $(P+1)$ -го ранга.

Для снижения размерности задачи синтеза сети будем проводить дальнейшую оптимизацию $(P+1)$ -го ранга и более высоких рангов не на всей n -вершинной сети, а на ее связных фрагментах каждый из которых сопоставляется одной из вершин сети.

Для реализации этого подхода с каждой вершиной i следует связать фрагмент Φ_i^{P+1} сети, количество вершин которого не превышает некоторой искомой величины m , такой, что время решения задачи синтеза на нем сети $(P+1)$ -го ранга с соблюдением граничных условий с остальной сетью было в n раз меньше времени $T/2$, т.е.:

$$\frac{T_n^P}{T_m^{P+1}} = \frac{C_n^P}{C_m^{P+1}} \cong n, \quad p+1 < m < n. \quad (6)$$

Каждый фрагмент Φ_i^{P+1} пересекается при этом с m_i фрагментами, где m_i – количество узлов фрагмента. Таким образом, выполняется необходимое условие оптимальности сети $(P+1)$ -го ранга: **«любой фрагмент сети Φ_i^{P+1} , $i = \overline{1, n}$ $(P+1)$ оптимален».**

Для приближения условия к достаточному следует определить предельное (наибольшее) значение m , при котором выполняется (6)

$$\begin{aligned} \frac{T_n^P}{T_m^{P+1}} &= \frac{n!(P+1)!(m-P-1)!}{P!(n-P)!m!} = \\ &= \left(\frac{P+1}{m-P}\right) \left(\frac{n-P+1}{m-P+1}\right) \left(\frac{n-P+2}{m-P+2}\right) \cdots \left(\frac{n-1}{m-1}\right) \frac{n}{m}. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\frac{T_n^P}{T_m^{P+1}} > \left(\frac{P+1}{m-P}\right) \left(\frac{n}{m}\right)^P.$$

Наибольшее значение n тогда определяется системой

$$\begin{cases} \left(\frac{P+1}{m-P}\right) \left(\frac{n}{m}\right)^P \geq n, \\ \left(\frac{P+1}{m+1-P}\right) \left(\frac{n}{m+1}\right)^P < n. \end{cases} \quad (7)$$

Определим такое наибольшее \hat{n} с которого на сетях с $n < \hat{n}$ будет достигнут $(P+1)$ -й ранг. Из (7) следует

$$\begin{cases} \frac{T_n^P}{T_{\hat{n}}^{P+1}} = \left(\frac{P+1}{\hat{n}-P}\right) \left(\frac{n}{\hat{n}}\right)^P \geq 1, \\ \frac{T_n^{P+1}}{T_{\hat{n}}^{P+1}} = \left(\frac{P+1}{\hat{n}+1-P}\right) \left(\frac{n}{\hat{n}+1}\right)^P < 1. \end{cases} \quad (8)$$

Например, в соответствии с (8) для $n = 100$ получим $\hat{n} = 45$.

4. Метод сочетания решения задач структурной и параметрической оптимизации в компьютерном проектировании потоковой сети высокого ранга оптимальности.

4.1. Метод Меренкова А. П., Хасилева В. Я., Некрасовой О. А.

В работе [4] изложены методы оптимального проектирования разветвленных трубопроводных сетей, разработанные в Сибирском энергетическом институте (г. Иркутск) СО РАН. Основу методов составили работы А. П. Меренкова, В. Я. Хасилева и О. А. Некрасовой [9], [10]. В основе метода Меренкова-Хасилева-Некрасовой (МХН) лежит зависимость стоимости каждой i -ой ветви сети от диаметра трубы на ней, стоимостного коэффициента b и гидравлического коэффициента $0 < \alpha < 2$

$$c_i = a + bd_i^\alpha. \quad (9)$$

На основе формулы типа Дарси-Вейсбаха $h_i = \frac{kx_i^\beta}{d_i^\gamma}$ получим

$$d_i = \left(\frac{kx_i^\beta}{h_i} \right)^{1/\gamma}. \quad (10)$$

Из (9), (10) получим

$$c_i = a + bk^{\frac{\alpha}{\gamma}} x_i^{\frac{\alpha\beta}{\gamma}} h_i^{-\frac{\alpha}{\gamma}},$$

$$c_i l_i = \left(a + bk^{\frac{\alpha}{\gamma}} x_i^{\frac{\alpha\beta}{\gamma}} h_i^{-\frac{\alpha}{\gamma}} \right) l_i.$$

В методе МХН решается задача минимизации капитальных затрат $Z(x, h)$ на сеть при заданных энергетических затратах Θ и общего потока в сеть Q от источника:

$$Z(x, h) = \sum_{i=1}^n \left(a + bk^{\frac{\alpha}{\gamma}} x_i^{\frac{\alpha\beta}{\gamma}} h_i^{-\frac{\alpha}{\gamma}} \right) l_i, \quad \rightarrow \min,$$

$$\sum_{i=1}^n x_i h_i l_i = \Theta,$$

$$Ax = Q,$$

где A – заданная матрица возможных соединений узлов сети, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор потоков; x_i, h_i – неизвестный поток и удельная потеря напора по i -ой ветви матрицы возможных соединений узлов сети друг с другом; α, β, γ – гидравлические параметры, зависящие от материала труб сети; a, b, k – заданные коэффициенты; l_i – длина i -ой ветви сети.

Значения гидравлических и стоимостных коэффициентов по трубам из различных материалов представлены в таблице 1, сформированной нами на основе методов определения потерь напора в водопроводных трубах [17, с. 54-55].

Таблица 1.

Table 1.

Материал труб	Коэффициенты			
	α	β	γ	k
Сталь	1.4	2	5.3	0.001735
Чугун	1.6	2	5.3	0.001735
Асбестоцемент	1.95	1.85	4.89	0.001180
Пластмасса	1.95	1.774	4.774	0.001052

Снизить размерность задачи позволяет разделение решения на две фазы: на первой фазе решается задача трассировки сети (определение потоков по ветвям сети), на второй фазе – задача МХН при известных потоках.

4.2. Метод трассировки сети

Общие затраты (капитальные и энергетические) на всю сеть будем оценивать функцией

$$F(x, h) = \sum_{i=1}^n \left(bk^{\frac{\alpha}{\gamma}} x_i^{\frac{\alpha\beta}{\gamma}} h_i^{-\frac{\alpha}{\gamma}} + px_i h_i \right) l_i. \quad (11)$$

Поскольку функция затрат (11) строго выпуклая и гладкая по h_i , то

$$\frac{\partial F}{\partial h_i} = -\frac{\alpha}{\gamma} bk^{\frac{\alpha}{\gamma}} x_i^{\frac{\alpha\beta}{\gamma}} h_i^{-\frac{\alpha+\gamma}{\gamma}} + px_i = 0. \quad (12)$$

Из (12) следует

$$h_i^{-\frac{\alpha+\gamma}{\gamma}} = \frac{\gamma p}{\alpha b k^{\frac{\alpha}{\gamma}}} x_i^{1-\frac{\alpha\beta}{\gamma}}. \quad (13)$$

Из (13), в свою очередь, следует

$$h_i = \left(\frac{\alpha b}{\gamma p} \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} k^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} x_i^{-\frac{\gamma-\alpha\beta}{\alpha+\gamma}}. \quad (14)$$

Подставив h_i в функцию общих затрат (11) на создание сети, получим

$$F(x, h) = \sum_{i=1}^n \left(bk^{\frac{\alpha}{\gamma}} x_i^{\frac{\alpha\beta}{\gamma}} \left(\left(\frac{\alpha b}{\gamma p} \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} k^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} x_i^{-\frac{\gamma-\alpha\beta}{\alpha+\gamma}} \right)^{-\frac{\alpha}{\gamma}} + px_i \left(\frac{\alpha b}{\gamma p} \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} k^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} x_i^{-\frac{\gamma-\alpha\beta}{\alpha+\gamma}} \right) l_i. \quad (15)$$

После ряда преобразований, из (15) получим

$$F(x, h) = \left(\left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} + \left(\frac{\alpha}{\gamma} \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} \right) b^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} (pk)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} \sum_{i=1}^n x_i^{\frac{\alpha\beta+\alpha}{\alpha+\gamma}} l_i. \quad (16)$$

Введя обозначения

$$\eta = \left(\left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} + \left(\frac{\alpha}{\gamma} \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} \right) b^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} (pk)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}}, \quad \delta = \frac{\alpha\beta + \alpha}{\alpha + \gamma},$$

окончательно получим:

$$F(x, h) = \eta \sum_{i=1}^n x_i^{\delta} l_i. \quad (17)$$

Величины η и δ зависят только от материала труб, используемых для создания сети и не зависят от потоков. Таким образом, приходим к чисто потоковой задаче поскольку η и δ являются константами на заданном сортаменте труб.

Но важнейшим обстоятельством при проектировании оптимальной сети является то, что $0 < \delta < 1$, то есть потоковая функция x_i^δ строго вогнута по потоку x_i . Вследствие этого локальные и глобальные экстремумы функции затрат (17) могут достигаться только на остовных деревьях заданного избыточного графа возможных соединений узлов сети друг с другом.

4.3. Метод определения оптимальных параметров разветвленной трубопроводной гидравлической сети при заданных потоках

При найденных при решении задачи трассировки потоках $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$, задача МХН переходит в задачу

$$\begin{aligned} Z(h) &= \sum_{i=1}^n \left(a + bk^{\frac{\alpha}{\gamma}} x_i^{*\frac{\alpha\beta}{\gamma}} h_i^{-\frac{\alpha}{\gamma}} \right) l_i, \quad \rightarrow \min, \\ \sum_{i=1}^n x_i^* h_i l_i &= \Theta. \end{aligned}$$

Решим ее методом Лагранжа:

$$L(h, \lambda) = \sum_{i=1}^n \left(a + bk^{\frac{\alpha}{\gamma}} x_i^{*\frac{\alpha\beta}{\gamma}} h_i^{-\frac{\alpha}{\gamma}} \right) l_i + \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i^* h_i l_i - \Theta \right),$$

$$\frac{\partial L(h, \lambda)}{\partial h_i} = -\frac{\alpha}{\gamma} bk^{\frac{\alpha}{\gamma}} x_i^{*\frac{\alpha\beta}{\gamma}} h_i^{-\frac{\alpha}{\gamma}-1} l_i + \lambda x_i^* l_i = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial L(h, \lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n x_i^* h_i l_i - \Theta = 0. \tag{19}$$

Выразив из (18) переменную h_i получим

$$h_i^{-\frac{\alpha+\gamma}{\gamma}} = \frac{\lambda \gamma x_i^{*\frac{\gamma-\alpha\beta}{\gamma}}}{\alpha b k^{\frac{\alpha}{\gamma}}}. \tag{20}$$

Из (20) получим

$$h_i = \left(\frac{\alpha b}{\lambda \gamma} \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} k^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} x_i^{*\frac{\alpha\beta-\gamma}{\alpha+\gamma}}. \tag{21}$$

Подставив полученное выражение h_i в (19), получим

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\alpha b}{\lambda \gamma} \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} k^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} x_i^{*\frac{\alpha\beta-\gamma}{\alpha+\gamma}} x_i l_i = \Theta. \tag{22}$$

Выразим λ из (22)

$$\lambda = \left(\frac{\Theta}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\alpha b}{\gamma} \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} k^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} x_i^{*\frac{\alpha\beta+\alpha}{\alpha+\gamma}} l_i} \right)^{-\frac{\alpha+\gamma}{\alpha}}. \tag{23}$$

Подставив значение λ из (23) в (21), после ряда преобразований, получим

$$h_i = \frac{\mathfrak{A}x_i^{*\frac{\alpha\beta-\gamma}{\alpha+\gamma}}}{\sum_{j=1}^n x_j^{*\frac{\alpha\beta+\alpha}{\alpha+\gamma}} l_j},$$

при этом для любого $i = j$, $x_i^* = x_j^*$.

Поскольку значения x_i^* , $i = \overline{1, n}$ известны, то вычислив сумму в знаменателе дроби и обозначив ее через M

$$M = \sum_{j=1}^n x_j^{*\frac{\alpha\beta+\alpha}{\alpha+\gamma}} l_j,$$

определим h_i^*

$$h_i^* = \frac{\mathfrak{A}x_i^{*\frac{\alpha\beta-\gamma}{\alpha+\gamma}}}{M}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Подставив найденные значения x_i^* , h_i^* $i = \overline{1, n}$, получим из (10) и (9) диаметры трубопроводов водопроводной сети и их удельную стоимость.

Теорема. (о коммутации фаз решения задачи синтеза потоковой сети)

С ростом ранга оптимальности решения задачи трассировки (1 фаза) уменьшаются и затраты на создание гидравлической трубопроводной сети при заданных фиксированных энергетических затратах.

Доказательство. Обозначим $\mathfrak{Z}_{\Phi_1}^P$, $\mathfrak{Z}_{\Phi_1}^{P+1}$ – соответственно оценку затрат на создание сетей P -го и $(P+1)$ -го рангов оптимальности на первой фазе оптимизации, а $\mathfrak{Z}_{\Phi_2}^P$, $\mathfrak{Z}_{\Phi_2}^{P+1}$ – оценку затрат на второй фазе, x_i^* , x_i^{**} , $i = \overline{1, n}$ – потоки на сети P -го и $(P+1)$ -го рангов.

Пусть $\mathfrak{Z}_{\Phi_1}^{P+1} \neq \mathfrak{Z}_{\Phi_1}^P \Rightarrow \mathfrak{Z}_{\Phi_1}^{P+1} < \mathfrak{Z}_{\Phi_1}^P$. Тогда из (16), (17) получим:

$$\mathfrak{Z}_{\Phi_1}^{P+1}(x^{**}) = \eta \sum_{i=1}^n x_i^{**\frac{\alpha(\beta+1)}{\alpha+\gamma}} l_i < \mathfrak{Z}_{\Phi_1}^P(x^*) = \eta \sum_{i=1}^n x_i^{*\frac{\alpha(\beta+1)}{\alpha+\gamma}} l_i.$$

Рассмотрим теперь значение затрат на создание сети по второй фазе при найденных на первой фазе потоках x^* , x^{**} :

$$\mathfrak{Z}_{\Phi_2}^{P+1}(x^{**}) = \mathfrak{A}^{-\frac{\alpha}{\gamma}} b k^{\frac{\alpha}{\gamma}} \sum_{i=1}^n x_i^{**\frac{\alpha(\beta+1)}{\alpha+\gamma}} \left(\sum_{j=1}^n x_j^{**\frac{\alpha(\beta+1)}{\alpha+\gamma}} l_j \right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} l_i.$$

$$\mathfrak{Z}_{\Phi_2}^P(x^*) = \mathfrak{A}^{-\frac{\alpha}{\gamma}} b k^{\frac{\alpha}{\gamma}} \sum_{i=1}^n x_i^{*\frac{\alpha(\beta+1)}{\alpha+\gamma}} \left(\sum_{j=1}^n x_j^{*\frac{\alpha(\beta+1)}{\alpha+\gamma}} l_j \right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} l_i.$$

Поскольку потоки x^* , x^{**} определены на первой фазе решения задачи, то

$$\sum_{j=1}^n x_j^{**\frac{\alpha(\beta+1)}{\alpha+\gamma}} l_j = \sum_{i=1}^n x_i^{**\frac{\alpha(\beta+1)}{\alpha+\gamma}} l_i$$

и значит

$$\mathfrak{Z}_{\Phi_2}^{P+1}(x^{**}) = \mathfrak{A}^{-\frac{\alpha}{\gamma}} b k^{\frac{\alpha}{\gamma}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{**\frac{\alpha(\beta+1)}{\alpha+\gamma}} l_i \right)^{\frac{\alpha}{\gamma}+1}, \quad \frac{\alpha}{\gamma} + 1 > 1,$$

$$Z_{\Phi_2}^P(x^*) = \Theta^{-\frac{\alpha}{\gamma}} b k^{\frac{\alpha}{\gamma}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^* \frac{\alpha(\beta+1)}{\alpha+\gamma} l_i \right)^{\frac{\alpha}{\gamma}+1}.$$

Поскольку $\frac{Z_{\Phi_1}^{P+1}(x^{**})}{Z_{\Phi_1}^P(x^*)} = r < 1$, то $\frac{Z_{\Phi_2}^{P+1}(x^{**})}{Z_{\Phi_2}^P(x^*)} = r^{\frac{\alpha}{\gamma}+1} < 1$, и, таким образом, с ростом ранга экстремума решения задачи трассировки сети снижаются и затраты на ее параметрическую оптимизацию, что и требовалось доказать.

5. Сетевая задача Штейнера

В сетевой задаче Штейнера (СЗШ), в отличие от задачи Штейнера (ЗШ) [11], [12], следует минимизировать не суммарную длину коммуникаций, а их общую стоимость. В работе Gilbert E. N. [13] впервые дана формула вычисления углов, образуемых смежными ребрами инцидентными точке Штейнера в случае, когда эти дуги имеют различные веса. В работах [14] – [16] были представлены подход и метод решения СЗШ основанные на динамической декомпозиции и ранговой оптимизации. Отметим, что СЗШ существенно сложнее (ЗШ).

Задача 1 (СЗШ): На плоскости задан полный двухзвенный ориентированный геометрический граф $\Gamma(B, D)$, n вершин которого (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$ фиксированы, а $(n - 2)$ вершины (x_i, y_i) , $i = n + 1, \dots, 2n - 2$ не фиксированы. Следует так определить координаты не фиксированных вершин и так приписать каждой дуге $ij \in D$ поток v_{ij} , что

$$C = \sum_{ij \in D} f_{ij}(v_{ij}) \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \rightarrow \min, \tag{24}$$

$$\sum_{i \in \Gamma_j^+} v_{ij} - \sum_{k \in \Gamma_j^-} v_{jk} = q_j, \forall j \in B, \tag{25}$$

$$\sum_{j \in \Gamma_1} v_{1j} = \sum_{j \in B_\Phi} q_j, \tag{26}$$

$$v_{ij} \geq 0, \forall ij \in D,$$

$$x_i = a_i, y_i = b_i, \forall i \in B_\Phi,$$

где $|B_\Phi| = n$, $|B_{\text{Ш}}| = n - 2$, $f_{ij}(v_{ij})$ – удельная стоимость ij -й ветви сети вогнутая непрерывно возрастающая функция, $f_{ij}(0) = 0$; $q_j > 0, j \in B_{\text{Ш}}$ и $q_j = 0, j \in B_{\text{Ш}}$; q_j – поток потребляемый j -м узле (вершине) сети. Целевая функция (24) отражает общую стоимость коммуникаций сети, уравнение (25) есть уравнение неразрывности потока в сети, уравнение (26) – соотношение между источниками и стоками.

5.1. Математическое моделирование оптимального проектирования трубопроводной гидравлической сети Штейнера.

Решение задачи оптимального проектирования трубопроводной сети Штейнера, как и сети без точек Штейнера, состоит из двух фаз. На первой фазе решается задача определения структуры (трассировки) сети Штейнера, т.е. задача

$$F_{\text{Ш}}(v, h) = \sum_{ij} \left(b k^{\frac{\alpha}{\gamma}} v_{ij}^{\frac{\alpha\beta}{\gamma}} h_{ij}^{-\frac{\alpha}{\gamma}} + p v_{ij} h_{ij} \right) \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \rightarrow \min.$$

При этом, в результате преобразований типа (12)-(17), как и в задаче без точек Штейнера, приходим к чисто потоковой задаче

$$F(v) = \eta \sum_{ij} v_{ij}^{\delta} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \rightarrow \min.$$

На втором этапе решается задача определения оптимальных параметров трубопроводной гидравлической сети Штейнера заданной структуры

$$h_{ij} = \frac{\partial v_{ij}^{* \frac{\alpha\beta-\gamma}{\alpha+\gamma}}}{\sum_{i_1j_1} v_{i_1j_1}^{* \frac{\alpha\beta+\alpha}{\alpha+\gamma}} l_{i_1j_1}},$$

где

$$l_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}.$$

Поскольку значения x_{ij}^* известны, то вычислив сумму в знаменателе дроби и обозначив ее M

$$M = \sum_{i_1j_1} v_{i_1j_1}^{* \frac{\alpha\beta+\alpha}{\alpha+\gamma}} l_{i_1j_1},$$

определим h_{ij}

$$h_{ij} = \frac{\partial v_{ij}^{* \frac{\alpha\beta-\gamma}{\alpha+\gamma}}}{M}.$$

Подставив найденные значения v_{ij}^* , h_{ij}^* , в формулу

$$d_i = \left(\frac{kv_i^{*\beta}}{h_i} \right)^{1/\gamma},$$

найдем диаметры трубопроводов водопроводной сети и их удельную стоимость по формуле

$$c_i = a + bd_i^{\alpha}.$$

5.2. Преобразование терминальной потоковой сети в потоковую сеть Штейнера

Поскольку задача синтеза потоковой сети Штейнера является существенно многоэкстремальной задачей большой размерности, то для ее решения следует стартовать с оптимального решения более простой задачи – задачи синтеза терминальной сети.

Преобразование терминального остова дерева в сеть Штейнера осуществляется путем развертывания его узлов в структуры Штейнера. Каждый такой узел содержит вершину, из которой поступает поток в узел (исток), и вершины, в которые доставляется поток из узла (стоки).

Развертывание элементарных узловых структур в узловых структурах Штейнера осуществляется в соответствии с фундаментальными свойствами точек Штейнера:

1. Степени точек Штейнера равны 3, а степени фиксированных (терминальных) точек не превосходят 3.

2. Дуги остова дерева, инцидентные каждой точке Штейнера, образуют смежные друг с другом углы, которые определяются по формуле

$$\cos(\alpha_{i,j}) = \frac{f_k^2(v_k) - f_i^2(v_i) - f_j^2(v_j)}{2f_i(v_i)f_j(v_j)},$$

где $\cos(\alpha_{i,j})$ – косинус угла между отрезками, соединяющими точку (x, y) с точками (x_i, y_i) и (x_j, y_j) .

3. Число точек Штейнера не превосходит $(n - 2)$, где n – количество терминальных точек.
4. Ребра дерева пересекаются только в вершинах дерева.

На рис. 1 представлено разворачивание элементарного узла типа «исток-4 стока» в узловую структуру Штейнера.

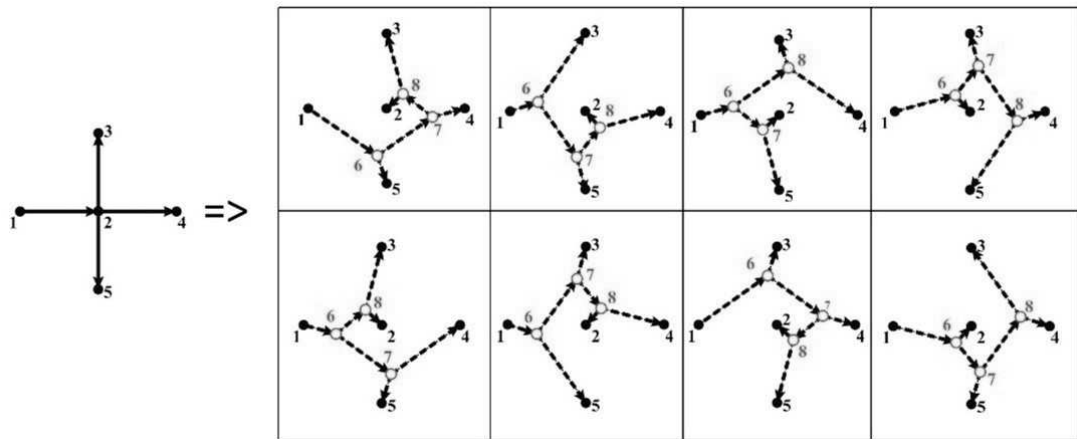


Рис 1. Узловая структура «исток-4 стока» терминальной потоковой сети и соответствующие ей узловые структуры Штейнера.

Fig 1. The nodal structure «source-4 drain» of the terminal network and the corresponding nodal Steiner structures.

5.3. Определение координат точек Штейнера

Остановимся более подробно на 2 этапе решения задачи. Пусть i – текущая точка Штейнера в процессе оптимизации сети на этапе 2.

Обозначим: M_k^{P-1} , \overline{M}_k^P , \overline{M}_k^{P+1} , соответственно, множество $(P - 1)$ -достижимых вершин из k ; P -достижимых, но не $(P - 1)$ -достижимых из k ; $(P + 1)$ -достижимых, но не P -достижимых из k . Эти множества будем для краткости называть внутренними вершинами, внутренним контуром и внешним контуром графа P_k^* .

Схема алгоритма динамической декомпозиции и ранговой оптимизации такова:

1. Определяются M_k^{P-1} , \overline{M}_k^P , \overline{M}_k^{P+1} .
2. Устраняются все дуги между вершинами M_k^P .
3. Устраняются внутренние точки Штейнера k -ой подсети и формируется множество $M\Phi_k^{P-1}$ фиксированных вершин.
4. Определяется количество внутренних точек Штейнера $(|\overline{M}_k^P \cup M\Phi_k^{P-1}| - 2)$ в формируемой подсети P_k^* .
5. Формируется (генерируется) очередная подсеть Штейнера, стягивающая точки множества $\overline{M}_k^P \cup M\Phi_k^{P-1}$.

6. Решается задача оптимизация координат точек Штейнера сформированной подсети, определяется стоимость ее коммуникаций. При этом для наилучшего согласования оптимизации подсети со всей остальной сетью, внутренний контур подвижен для его точек Штейнера, а внешний контур фиксирован т.е. варьируются координаты не только внутренних точек Штейнера, но и точек Штейнера, расположенных на внутреннем контуре сети.

Пункты 5 и 6 повторяются для всех генерируемых альтернативных структурах Штейнера текущей вершины i с отбором оптимальной по стоимости коммуникаций. Далее переходим к оптимизации следующей подсети сети Штейнера. Процесс оптимизации структуры сети завершается при построении такой сети Штейнера, любая подсеть P -го ранга которой уже не модифицируется в процессе оптимизации всей сети. Такая сеть и является сетью P -го ранга оптимальности.

6. Вычислительный эксперимент

Ниже представлены результаты вычислительного эксперимента. Вычислительный эксперимент был проведен для подтверждения согласованности фаз решения задачи компьютерного проектирования трубопроводных гидравлических сетей водоснабжения высокого ранга оптимальности. Были рассмотрены 2 сети: средней и большой размерности.

6.1. Сеть «30 узлов»

Результаты компьютерного проектирования сети на заданном графе, моделирующем возможные соединения узлов сети друг с другом.

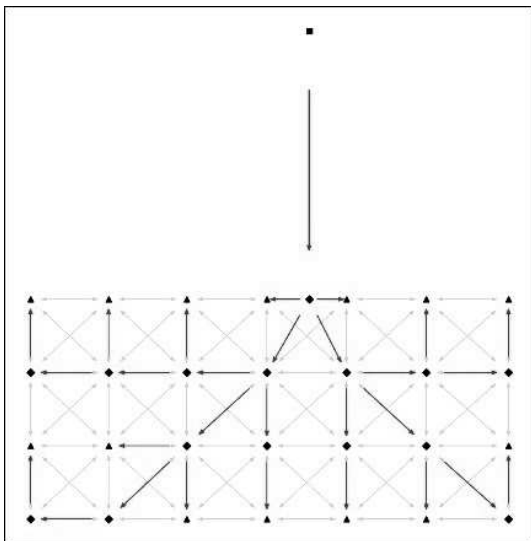


Рис. 2. Начальное остовное дерево сети
Fig. 2. Initial spanning tree

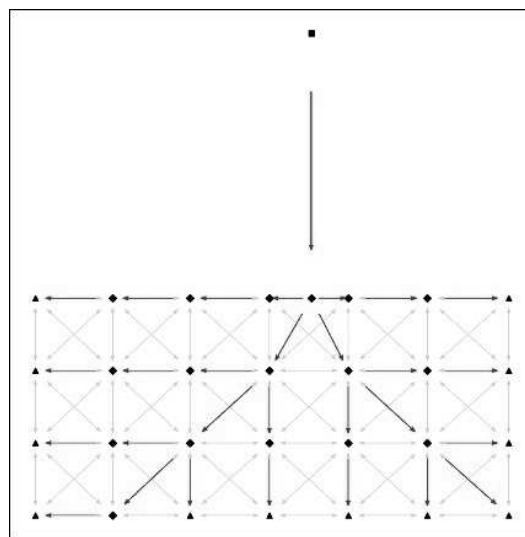


Рис. 3. 5-оптимальное дерево сети
Fig 3. 5-optimal tree

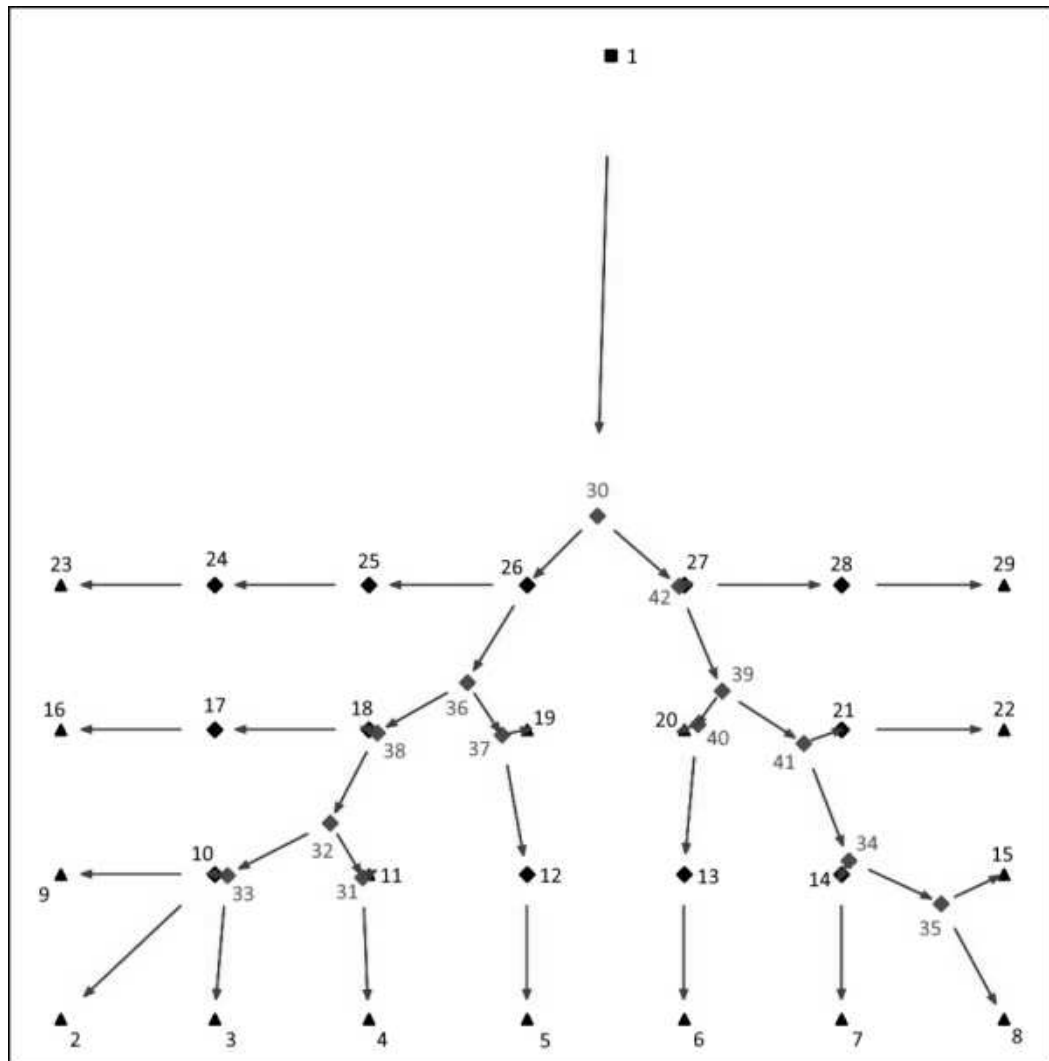


Рис 4. 2-оптимальная потоковая сеть Штейнера.

Fig. 4. Steiner's 2-optimal flow network

Таблица 2.

Table 2.

Дерево	Оценка капитальных затрат на создание сети (млн. руб.)
Начальное остовное дерево сети (Рис. 2.)	24,847
5-оптимальное дерево сети (Рис. 3.)	23,018
2-оптимальная потоковая сеть Штейнера (Рис. 4.)	22,464

В таблице 3 приведены выходные параметры 2-оптимальной потоковой сети Штейнера (рис. 4): i – номер исходящего узла сети, j – номер входящего узла сети, l длина ветви, x – поток по ветви, h – потери напора по ветви, c – удельная стоимость ветви, $c * l$ – стоимость ветви, d диаметр трубы ветви, v скорость потока по ветви, $x * h * l$ – энергетические затраты по трубопроводу ветви.

Таблица 3.

Table 3.

i	j	l	x	h	c	$c * l$	d	v	$x * h * l$
1	30	2288,816	0,672	0,018	4069,702	9314799,148	0,475	3,797	28,024
10	9	720	0,024	0,035	278,842	200766,16	0,12	2,12	0,604
10	2	1018,234	0,024	0,035	278,842	283926,226	0,12	2,12	0,854
12	5	720	0,024	0,035	278,842	200766,16	0,12	2,12	0,604
13	6	720	0,024	0,035	278,842	200766,16	0,12	2,12	0,604
14	7	720	0,024	0,035	278,842	200766,16	0,12	2,12	0,604
17	16	720	0,024	0,035	278,842	200766,16	0,12	2,12	0,604
18	17	720	0,048	0,031	487,001	350640,494	0,16	2,393	1,055
21	22	758	0,024	0,035	278,842	211362,151	0,12	2,12	0,636
24	23	720	0,024	0,035	278,842	200766,16	0,12	2,12	0,604
25	24	720	0,048	0,031	487,001	350640,494	0,16	2,393	1,055
26	25	740	0,072	0,028	674,825	499370,143	0,189	2,569	1,502
26	36	558,559	0,288	0,022	2058,42	1149749,389	0,335	3,274	3,459
27	28	737	0,048	0,031	487,001	358919,506	0,16	2,393	1,08
28	29	758	0,024	0,035	278,842	211362,151	0,12	2,12	0,636
30	26	476,185	0,384	0,02	2594,444	1235435,573	0,377	3,443	3,717
30	42	519,834	0,288	0,022	2058,42	1070036,985	0,335	3,274	3,219
31	11	30,612	0,024	0,035	278,842	8535,853	0,12	2,12	0,026
31	4	706,881	0,024	0,035	278,842	197108,099	0,12	2,12	0,593
32	31	311,016	0,048	0,031	487,001	151464,906	0,16	2,393	0,456
32	33	550,186	0,096	0,027	850,553	467962,175	0,213	2,702	1,408
33	3	717,769	0,024	0,035	278,842	200144,042	0,12	2,12	0,602
33	10	57,829	0,072	0,028	674,825	39024,612	0,189	2,569	0,117
34	35	481,454	0,048	0,031	487,001	234468,636	0,16	2,393	0,705
34	14	76,071	0,048	0,031	487,001	37046,775	0,16	2,393	0,111
35	15	326,109	0,024	0,035	278,842	90932,906	0,12	2,12	0,274
35	8	644,828	0,024	0,035	278,842	179805,071	0,12	2,12	0,541
36	37	311,507	0,072	0,028	674,825	210212,736	0,189	2,569	0,632
36	38	488,908	0,216	0,023	1633,141	798455,997	0,297	3,113	2,402
37	19	120,804	0,024	0,035	278,842	33685,237	0,12	2,12	0,101
37	12	702,061	0,048	0,031	487,001	341904,181	0,16	2,393	1,029
38	18	42,244	0,072	0,028	674,825	28507,263	0,189	2,569	0,086
38	32	498,218	0,144	0,025	1178,589	587194,38	0,251	2,9	1,767
39	40	203,154	0,072	0,028	674,825	137093,541	0,189	2,569	0,412
39	41	462,251	0,144	0,025	1178,589	544804,531	0,251	2,9	1,639
40	20	67,912	0,024	0,035	278,842	18936,757	0,12	2,12	0,057
40	13	748,489	0,048	0,031	487,001	364514,748	0,16	2,393	1,097
41	21	191,517	0,048	0,031	487,001	93268,718	0,16	2,393	0,281
41	34	621,653	0,096	0,027	850,553	528748,103	0,213	2,702	1,591
42	27	26,039	0,072	0,028	674,825	17571,697	0,189	2,569	0,053
42	39	558,253	0,216	0,023	1633,141	911705,375	0,297	3,113	2,743
Итоговые данные	Общая длина	22560,393				Капит-е затраты			Энерг-е затраты
						22463935,56			67,584

6.2. Сеть «101 узел»

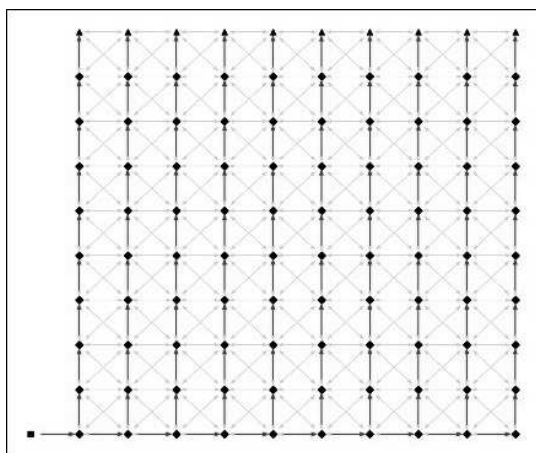


Рис. 5. Начальное остовное дерево.
Fig. 5. Initial spanning tree.

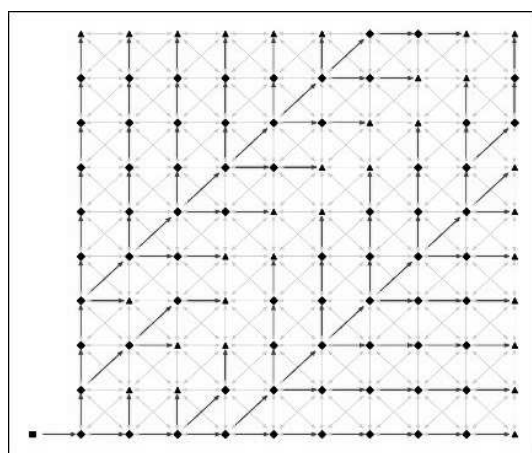


Рис. 6. 3-оптимальное остовное дерево.
Fig. 6. 3-optimal tree.

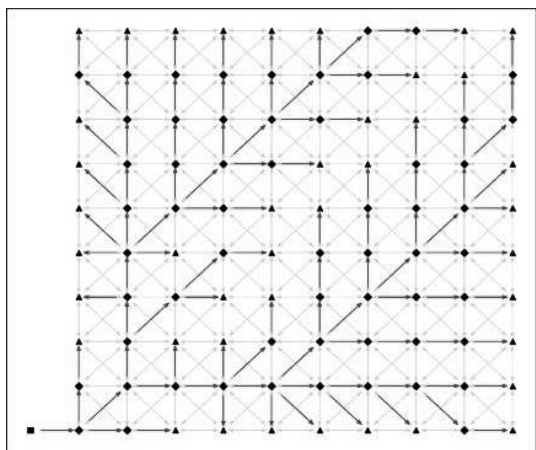


Рис. 7. 5-оптимальное остовное дерево (кустовая оптимизация).
Fig. 7. 5-optimal tree (cluster optimization).

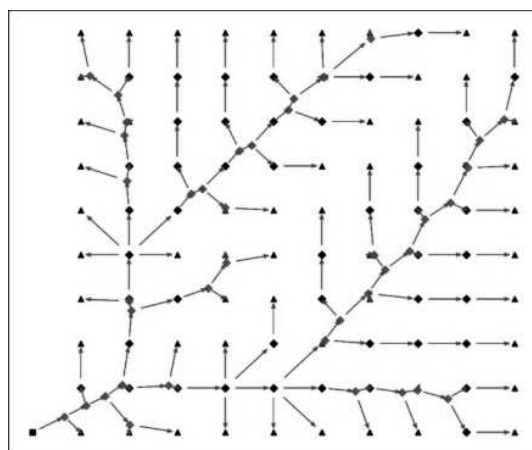


Рис. 8. 2-оптимальная потоковая сеть Штейнера.
Fig. 8. Steiner's 2-optimal flow network.

Таблица 4.

Table 4.

Дерево	Оценка капитальных затрат на создание сети (млн. руб.)
Начальное остовное дерево (Рис. 5.)	17,603
3-оптимальное остовное дерево (Рис. 6.)	14,435
5-оптимальное остовное дерево (кустовая оптимизация) (Рис. 7.)	14,128
2-оптимальная потоковая сеть Штейнера (Рис. 8.)	13,866

Заключение

В результате научных исследований получены следующие результаты:

1. Разработан метод снижения размерности задачи синтеза трубопроводной гидравлической сети. Метод основан на разделении задачи синтеза на две подзадачи – оптимизацию структуры (трассировки) сети и оптимизацию параметров сети на найденной структуре.
2. Метод обеспечивает возможность компьютерного проектирования трубопроводных гидравлических сетей высокого ранга оптимальности.
3. Проведенный обширный вычислительный эксперимент компьютерного проектирования показал эффективность метода. При этом подтверждена согласованность фаз решения задачи синтеза трубопроводной гидравлической сети: с возрастанием ранга оптимальности решения задачи структурной оптимизации (трассировки) сети снижаются и затраты на параметрическую оптимизацию сети на полученной структуре.
4. Метод может быть использован в компьютерном проектировании больших трубопроводных сетей регионального и межрегионального водоснабжения, что актуально в настоящее время.

Список использованных источников

1. Булатов В. П., Кассинская Л. И. Некоторые методы минимизации вогнутой функции на выпуклом многограннике // Методы оптимизации и их приложения. Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1987. С. 151–172.
2. Анциферов Е. Г., Ащепков Л. Т., Булатов В. П. Методы оптимизации и их приложения. Ч. 1. Математическое программирование // Издательство «Наука», Новосибирск, 1990. 158 с. ISBN 5-02-029658-9
3. Трубин В. А., Михалевич В. С., Шор Н. З. Оптимизационные задачи производственно – транспортного планирования // Издательство "Наука Москва, 1986. 260 с.
4. Меренков А. П., Сенинова Е. В., Сумароков С. В. и др. Математическое моделирование и оптимизация систем тепло-, водо-, нефте- и газоснабжения, Наука, Новосибирск, 1992. 407 с.
5. Кудяев В. Ч. Ранги экстремумов и структурная оптимизация больших сетевых систем // Известия КБНЦ РАН, 2016, № 4(72). С. 15–24.
6. Кудяев В. Ч., Абазоков М. Б. Ранговая оптимизация потоковых сетей // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 4(24). С. 178–185. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-178-185
7. Кудяев В. Ч., Абазоков М. Б. Компьютерное проектирование потоковых сетей Р-го ранга оптимальности // Известия КБНЦ РАН, 2019, №6(92). С. 122–131. DOI:10.35330/1991-6639-2019-6-92-122-131
8. Кудяев В. Ч., Абазоков М. Б. Кустовая оптимизация высокого ранга оптимальности потоковых сетей // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 37, № 4. С. 104–118.
9. Меренков А. П. Математические модели и методы для анализа оптимального проектирования трубопроводных систем: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск: Секция кибернетики Объединенного ученого совета СО АН СССР, 1974. 34 с.
10. Некрасова О. А., Хасилев В. Я. Оптимальное дерево трубопроводной системы // Экономика и мат. методы, 1970. Т. 4, №3. С. 427–432.
11. Гордеев Э. Н., Тарасцов О. Г. Задача Штейнера. Обзор // Дискретная математика. 1993, Т. 5, вып. 2. С. 3–28.
12. Melzak Z. A. On the problem of Steiner. Canad. Math. Bull. 1961. V. 4. P. 143–148.

13. *Gilbert E. N.* Minimal Cost Communication Networks. Bell System technological Journal. 1967. No. 9. P. 48–50.
14. *Багов М. А.* Построение потоковой сети Штейнера 2-го ранга оптимальности // Известия КБНЦ РАН. 2021. Т. 104. № 6. С. 185–203.
15. *Bagov M. A., Kudaev V. C.* Construction of the Current Steiner Network of the Second Optimality Rank. J Math Sci 253, 488–499 (2021). <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05245-1>.
16. *Багов М. А.* Нелокальное решение сетевой задачи Штейнера // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 4(24). С. 148–157. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-148-157.
17. *Абрамов Н. Н. и др.* Расчет водопроводных сетей, Стройиздат, М., 1983. 278 с.

Поступила 18.11.2022; одобрена после рецензирования 28.11.2022; принята к публикации 14.12.2022.

Об авторах:

Абазоков Мухаммед Борисович, младший научный сотрудник отдела вычислительных методов Института прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, (360017, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова 89 А), <https://orcid.org/0000-0002-6847-403X>, Abazokov.Mukhammed@yandex.ru

Багов Марат Алиевич, научный сотрудник отдела вычислительных методов Института прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, (360017, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова 89 А), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57221977895>, maratniipma@mail.ru

Кудаев Валерий Черимович, к. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник отдела вычислительных методов Института прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, (360017, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова 89 А), <https://orcid.org/0000-0002-8313-4199>, <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57205145867>, vchkudaev@mail.ru

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

References

1. *V. P. Bulatov, L. I. Kassinskaya* Nekotorye metody minimizatsii vognutoy funktsii na vypuklom mnogogrannike. Metody optimizatsii i ikh prilozheniya. Irkutsk: SEI SO AN SSSR, 1987. P. 151–172.
2. *E. G. Antsiferov, L. T. Ashchepkov, V. P. Bulatov* Metody optimizatsii i ikh prilozheniya. Ch. 1. Matematicheskoe programmirovaniye. Izdatel'stvo «Nauka», Novosibirsk, 1990. 158 p. ISBN 5-02-029658-9.
3. *V. A. Trubin, V. S. Mikhalevich, N. Z. Shor* Optimizatsionnye zadachi proizvodstvenno – transportnogo planirovaniya. Izdatel'stvo "Nauka Moskva. 1986. 260 p.
4. *A. P. Merenkov, E. V. Sennova, S. V. Sumarokov i dr.* Matematicheskoe modelirovaniye i optimizatsiya sistem teplo-, vodo-, nefte- i gazosnobzheniya, Nauka, Novosibirsk, 1992, 407 p.
5. *V. Ch. Kudaev* Ranks of extrema and structural optimization of the big network systems // News of the Kabardin-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, 2016, No. 4 (72). P. 15–24.
6. *V. Ch. Kudaev, M. B. Abazokov* Rank optimization for flow networks, Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki. 2018, 24: 4. P. 178–185. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4 178-185
7. *V. Ch. Kudaev, M. B. Abazokov* Computer design of stream networks of P-th optimality rank. News of the Kabardin-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, 2019, No. 6(92). P. 122–131. DOI:10.35330/1991-6639-2019-6-92-122-131

8. *M. B. Abazokov, V. Ch. Kudaev* Bush optimization method for high ranked stream networks. Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki. 2021, 37: 4. P. 104–118. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-104-118
9. *A. P. Merenkov* Matematicheskie modeli i metody dlya analiza optimal'nogo proektirovaniya truboprovodnykh sistem: Avtoref. dis. ... d-ra fiz.-mat. nauk. Novosibirsk: Sektsiya kibernetiki Ob"edinennogo uchenogo soveta SO AN SSSR, 1974. 34 p.
10. *O. A. Nekrasova, V. Ya. Khasilev* Optimal'noe derevo truboprovodnoy sistemy. Ekonomika i mat. metody, 1970, V. 4, No. 3. P. 427–432.
11. *E. N. Gordeev, O. G. Tarastsov* Zadacha Shteynera. Obzor. Diskretnaya matematika. V. 5, vyp. 2, 1993. P. 3–28.
12. *Z. A. Melzak* On the problem of Steiner. Canad. Math. Bull. 1961. V. 4. P. 143–148.
13. *E. N. Gilbert* Minimal Cost Communication Networks. Bell System technological Journal. 1967, No. 9. P. 48–50.
14. *M. A. Bagov* Postroenie potokovoy seti Shteynera 2-go ranga optimal'nosti. Izvestiya KBNTs RAN. 2021. V. 104. No. 6. P. 185–203. DOI: 10.35330/1991-6639-2021-6-104-185-203
15. *M. A. Bagov, V. C. Kudaev* Construction of the Current Steiner Network of the Second Optimality Rank. J Math Sci 253, 488–499 (2021). <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05245-1>.
16. *M. A. Bagov* A solution with nonlocal effect to the Steiner problem in networks, Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki. 2018, 24: 4. P. 148–157. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-148-157
17. *N. N. Abramov i dr.* Raschet vodoprovodnykh setej, Strojizdat, M., 1983. 278 p.

Submitted 18.11.2022; approved after reviewing 28.11.2022; accepted for publication 14.12.2022.

About the authors:

Mukhammed Borisovich Abazokov, junior researcher, department of Computational Methods, Institute of Applied Mathematics and Automation of KBSC RAS, (360017, 89 A Shortanova St., Nalchik, Russia), <https://orcid.org/0000-0002-6847-403X>, Abazokov.Mukhammed@yandex.ru

Marat Alievich Bagov, researcher, department of Computational Methods, Institute of Applied Mathematics and Automation of KBSC RAS, (360017, 89 A Shortanova St., Nalchik, Russia), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57221977895>, maratniipma@mail.ru

Valery Cherimovich Kudaev, Ph.D., lead researcher, department of Computational Methods, Institute of Applied Mathematics and Automation of KBSC RAS, (360017, 89 A Shortanova St., Nalchik, Russia), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57205145867>, <https://orcid.org/0000-0002-8313-4199>, vchkudaev@mail.ru

The authors have read and approved the final version of the manuscript.