ФИЗИКА

УДК 535;517.3

Закон усиления лазерного излучения для инвертированных сред с фрактальной структурой, полученный в рамках d-анализа

Чуриков В.А.
Представлено академиком АМАН Б.Б. Алчагировым

Введение и постановка задачи.

В последнее время возрос интерес к исследованию физических свойств материалов, которые можно рассматривать как фрактальные. Рассмотрим оптические свойства таких сред, в которых возможна инверсия населённостей уровней.

Закон усиления лазерного излучения в инвертированных средах описывается дифференциальным уравнением [1]

$$dI_{10} = (q-k)I_{10}dx. \qquad (1)$$

Здесь I_{10} - интенсивность распространяющегося вдоль оси x лазерного пучка; I_{10}^0 - начальная интенсивность пучка; k- коэффициент ослабления пучка в среде; q - коэффициент усиления индуцированного излучения, который равен $q=\sigma\Delta N$, $\sigma=(8\pi)^{-1}\nu^{-1}c^2A_{10}g(\nu-\nu_0)$ - сечение индуцированного излучения, где A_{10} - вероятность спонтанного перехода между уровнями, $g(\nu-\nu_0)$ - профиль линии, ν и ν_0 соответственно частота излучения и резонансная частота лазерного излучения; c - скорость света; $\Delta N = N_1-(g_1/g_0)N_0 > 0$ - инверсия населенностей энергетических уровней, N_0 и N_1 концентрации единичных излучающих систем (атомов, молекул и т.д.), а g_0 и g_1 - статистические веса этих уровней; индекс 1 у введённых величин соответствует энергетически более высокому уровню, а индекс 0, энергетически более низкому уровню у излучающих систем.

При наличии инверсии возможны ситуации когда $\sigma > k$, что соответствует усилению излучения в среде (*сверхпрозрачность*), $\sigma < k$ - ослаблению пучка, а когда $\sigma = k$ процессы усиления и ослабление пучка уравновешиваются, и наступает "*просветление*" среды.

Уравнение (1) сформулировано для непрерывных сред с целым числом измерений. Целью данной работы является поиск более общего уравнения, когда активная среда является *пространством с нецелочисленной размерностью* и нахождение решения такого уравнения. *Пространства с нецелочисленной размерностью* в последнее время активно изучаются в физике и в математике и обычно называются *фракталами* [2].

Решение задачи.

Если среда, в которой распространяется световой пучок вдоль оси x, является фракталом с постоянной дробной размерностью α не зависящей ни от времени, ни от пространственных координат, то такой фрактал будем называть гомогенным фракталом и обозначать x_α. Размерность α удовлетворяет неравенствам $0 \le \alpha \le 1$. Предельный случай $\alpha = 0$, соответствует отсутствию среды, а $\alpha = 1$ соответствует предельной плотности, т.е. "непрерывной" среде.

Тогда в соотношении для распространения пучка во фрактальной среде вдоль оси x можно записать через дифференциал по точкам фрактала dx_α, лежащего на пространственной координате x и имеющий дробную размерность α, которое будет

$$dI_{10} \propto \tau(q-k)I_{10}^0 dx_\alpha. \qquad (2)$$

Здесь введён *топологический коэффициент* τ фрактала для рассматриваемого процесса [3], который удовлетворяет неравенствам $0 \le \tau \le 1$. Значение τ зависит от топологических и геометрических свойств фрактала, расчёт которого может оказаться сложной задачей и здесь рассматриваться не будет. Для случая, когда $\alpha = 1$, всегда выполняется равенство $\tau = 1$; k - *линейный коэффициент ослабления*, который можно представить в виде суммы $k(\nu, \tau) = k_A(\nu, \tau) + k_D(\nu, \tau) + k_R(\nu, \tau)$, где $k_A(\nu, \tau)$ - *коэффициент поглощения*, $k_D(\nu, \tau)$ - *коэффициент внутренней дифракции*, учитывающий дифракцию на внутренних структурах фрактала, $k_R(\nu, \tau)$ - *коэффициент внутреннего рассеяния*. Эти коэффициенты зависят от ν и τ.

Точки на оси x, не лежащие на фрактале x_α, будут принадлежать сопряжённому фракталу размерности $1-\alpha$, который обозначим как $x_{1-\alpha}$. Предположим для простоты, что влияние сопряженного фрактала на формирование пучка пренебрежимо мало.

При переходе к дифференциальному соотношению по фракталу (2), нельзя ставить знак равенства между левой и правой частями, как в уравнении (1), ввиду того, что физические размерности левой и правой части при такой замене уже не совпадают.

$$[dx_\alpha] = L^\alpha; [dx] = L.$$

Разделив переменные в соотношении (2)

$$\int \frac{dI_{10}}{I_{10}} \propto \tau(\sigma - k) \int dx_\alpha.$$

Чтобы поставить знак равенства между левой и правой частью, необходимо правую часть преобразовать так, чтобы она качественно и количественно была согласована с левой частью. Для этого правую часть необходимо привести к одному масштабу и к одной физической размерности с левой частью. Эти операции можно проделать в соответствии с d-анализом, т.е. дробным анализом на основе d-оператора дифференцирования и интегрирования дробных порядков [4]. В этом случае правую часть надо умножить на *коэффициент преобразования размерности*, а именно на $x^{1-\alpha}$, который переводит размерность правой части до стандартной размерности. Физически это соответствует тому, что учитывается прохождение пучка не только по точкам фрактала, но и в остальных точках оси x, которые не относятся к фракталу x_α.

Далее правую часть необходимо умножить на *коэффициент* $\alpha^2\Gamma(\alpha)$, ((...) гамма-функция Эйлера), который переводит длину прохождения пучка во фрактале к *эффективной толщине фрактала*, которая равна αx. Для этого перейдём от интеграла функции $f(x_\alpha)$ по точкам фрактала $\int f(x_\alpha) dx_\alpha$, к дробному интегрированию порядка α по переменной x функции $f(x)$ по точкам оси x, т.е. к интегрированию $\int f(x) d^\alpha x$, которое производится с использованием d-оператора.

Тогда с учётом этих преобразований в соотношение (2) можно получить равенство, которое после разделения переменных станет следующим

$$\int \frac{dI_{10}}{I_{10}} = \tau(q-k)\alpha^2\Gamma(\alpha)x^{1-\alpha} \int d^\alpha x.$$

Интегрируя левую часть обычным способом, получим

$$\int \frac{dI_{10}}{I_{10}} = \ln(I_{10}) - \ln(C).$$

Здесь C – константа интегрирования.

Правую часть будем интегрировать с помощью d-оператора дробного интегродифференцирования. Найдя дробный интеграл порядка α, получим

$$\tau(\sigma-k)\alpha^2\Gamma(\alpha)x^{1-\alpha}\int d^\alpha x=\frac{\tau(q-k)\alpha^2\Gamma(\alpha)x^{1-\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)}x^\alpha+\alpha^2\Gamma(\alpha)x^{1-\alpha}C_\alpha(x).$$

Здесь $C_\alpha(x)$ – полином интегрирования порядка α, который в рамках d-анализа является обобщением констант интегрирования на случай любых вещественных порядков. Второе слагаемое, без потери общности, можно приравнять к нулю, ввиду его произвольности, т.е. $\alpha^2\Gamma(\alpha)x^{1-\alpha}C_\alpha(x)=0$.

Окончательно получим правую часть в виде

$$\tau(q-k)\alpha^2\Gamma(\alpha)x^{1-\alpha}\int d^\alpha x=\tau(q-k)\alpha x.$$

Приравняв обе части, получим общее решение: $\ln(I)=\tau(q-k)\alpha x+\ln(C)$.

Потенцируя это выражение, получим общее решение в явном виде

$$I=\exp(\tau(q-k)\alpha x+\ln(C)).$$

Найдём частное решение для задачи Коши с начальными условиями $x=x_0$ и $I_{10}(x_0)=$ $=I_{10}^0$, где x_0 - граница фрактала, на которую падает пучок, имеющий начальную интенсивность I_{10}^0.

Для константы интегрирования получим: $C=\exp(-\tau(q-k)\alpha x_0+\ln(I_{10}^0))$.

Частное решение для заданных начальных условий будет

$$I_{10}=I_{10}^0\exp[\tau\alpha(q-k)(x-x_0)]. \tag{3}$$

Здесь разность $x-x_0$ является расстоянием пройденным пучком вдоль оси x в среде.

Равенство (3) является обобщением закона вынужденного излучения в инвертированной среде имеющей структуру гомогенного фрактала.

В частности, когда $\alpha=1$, тогда $\tau=1$, а эффективная толщина фрактала будет совпадать с реальной толщиной среды и закон излучения (3) переходит в известный закон излучения: $I_{10}=I_{10}^0\exp[(q-k)(x-x_0)]$ [1]. Случай $\alpha=0$ соответствует отсутствию среды, и как следствие, пучок не будет меняться, т.е. $I_{10}=I_{10}^0$.

С другой стороны, когда $q=0$, получим обобщение *закона Бугера – Ламберта – Бера* на случай ослабления пучка света проходящего через гомогенный фрактал [5].

Если дополнительно учитывать внешние дифракционные потери пучка на границе области, ограничивающей фрактал и потери на отражение от поверхности фрактала, то придём к более общему равенству

$$I_{10}=I_{10}^0K_DK_O\exp[\tau\alpha(q-(k_A+k_D+k_R))(x-x_0)].$$

Здесь K_O - *коэффициент потерь на отражение* и K_D – коэффициент дифракционных потерь на границах фрактала (*внешние дифракционные потери*).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карлов Н.В.* Лекции по квантовой электронике. М.: Наука. 1988. 336 с.

2. *Schroeder M.* Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite Paradise. New York: W.H. Freeman and Company. 1991. 429 p. (Перевод на русский: *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". 2001. 528 с.).
3. *Чуриков В.А.* Замечания по поводу дробной размерности при описании процессов во фракталах // Сборник материалов VII всероссийской молодежной научно-инновационной школы "Математика и математическое моделирование". Саров, СарФТИ НИЯУ МИФИ, 16–19 апреля 2013. С. 59.
4. *Чуриков В.А.* Краткое введение в дробный анализ целочисленных порядков. Томск: Изд-во ТПУ. 2011. 72 с.
5. *Чуриков В.А.* Закон Бугера – Ламберта – Бера для оптических сред с фрактальной структурой в рамках d-анализа // Известия вузов. Физика. 2013. Т. 56, № 11/2. С. 252-254.

ABSTRACT

Optical properties of homogeneous fractals are investigated. The law of radiation amplification in inverted media, which are homogeneous fractals, has been generalized. So this law is specified as the law of Bouguer-Lambert-Beer for fractal environments. The law has resulted from local fractional analysis based on d?operator. The d-operator is generalized by differentiation and integration in view of any permanent complex orders. For d-operator correspondence principle is performed that provides derivatives and integrals of classical analysis if the order is 1.

Keywords. Fractal ambience, homogeneous fractal, fractional analysis, d-operator.

Tomsk Polytechnic University, Tomsk; vachurikov@list.ru

АННОТАЦИЯ

Исследуются оптические свойства гомогенных фракталов. Найдено обобщение закона усиления излучения в средах с инверсией, которые являются гомогенными фракталами. Частным случаем полученного закона является закон Бугера – Ламберта – Бера для фрактальных сред. Закон получен с помощью локального дробного анализа на основе d-оператора. d-оператор обобщает операции дифференцирования и интегрирования на случай любых постоянных комплексных порядков. Для d-оператора выполняется принцип соответствия, при котором для порядка 1 получаются производные и интегралы классического анализа.

Ключевые слова. Фрактальная среда, гомогенный фрактал, дробный анализ, d-оператор.

Томский политехнический университет, г. Томск; vachurikov@list.ru