УДК 517.58 Научная статья
DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-4-29-38

Некоторые формулы дробного интегрирования от одной функции Фокса с четырьмя параметрами

Ф. Г. Хуштова

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН
г. Нальчик, Россия
khushtova@yandex.ru

Аннотация. Решения многих задач математической физики, техники и экономики выражаются через так называемые специальные функции. В теории специальных функций важное место занимают функции гипергеометрического типа. Многие из них могут быть записаны через G-функцию Мейера. Обобщением функции Мейера является H-функция Фокса. Некоторые свойства этой функции могут быть получены из её представления с помощью интеграла Меллина – Барнса. При выводе некоторых формул для этой функции при частных значениях её параметров, ввиду громоздкости записи функции Фокса, удобнее пользоваться упрощенными обозначениями. В данной работе рассматривается частный случай такой функции Фокса, содержащей четыре параметра. Для этой функции получены формулы дробного интегрирования Римана–Лиувилля и Эрдейи–Кобера. Приводится интегральное представление рассматриваемой функции через интеграл Меллина – Барнса, выписываются условия, при которых он сходится абсолютно, и асимптотические разложения для этой функции при большом и малом значениях аргумента. Доказываемые в работе формулы получены с использованием указанного интегрального представления Меллина – Барнса и известных формул интегрирования от степенных функций. При частных значениях параметров из рассматриваемой функции получаются некоторые известные элементарные и специальные функции, а из полученных формул дробного интегрирования – известные интегральные значения от этих функций.

Ключевые слова: Функция Фокса, функция типа Миттаг-Леффлера, гипергеометрическая функция, неполная гамма-функция, интеграл Меллина – Барнса, вырожденная гипергеометрическая функция Куммера, дробное интегрирование Римана–Лиувилля, дробное интегрирование Эрдейи–Кобера

Благодарности: автор выражает благодарность рецензентам за указанные замечания, которые позволили повысить качество статьи.

Для цитирования. *Хуштова Ф. Г.* Некоторые формулы дробного интегрирования от одной функции Фокса с четырьмя параметрами // Доклады АМАН. 2022. Т. 22, № 4. С. 29–38. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-4-29-38

MSC 32A10; 32A37 Original article

On some formulas for fractional integration of one Fox function with four parameters

Fatima G. Khushtova

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik, Russia

khushtova@yandex.ru

Abstract. Solutions to many problems of mathematical physics, engineering and economics are expressed through the so-called special functions. In the theory of special functions an important place is occupied by functions of the hypergeometric type. Many of them can be written in terms of the Meyer G-function. A generalization of the Meyer function is the Fox H-function. Some properties of this function can be obtained from its representation using the Mellin – Barnes integral. When deriving some formulas for this function for particular values of its parameters, due to the cumbersome writing of the Fox function, it is more convenient to use simplified notation. In this paper, we consider a special case of such a Fox function containing four parameters. For this function, Riemann–Liouville and Erdelyi–Kober fractional integration formulas are obtained. An integral representation of the considered function h through the Mellin – Burns integral, we write out the conditions under which it converges absolutely, and the asymptotic expansions for this function for large and small values of the argument. The formulas proved in the paper are obtained using the indicated Mellin – Burns integral representation and the well-known integration formulas from power functions. For particular values of the parameters, the function under consideration yields some well-known elementary and special functions, and from the obtained formulas of fractional integration – the known integral values of these functions.

Keywords: Fox function, Mittag-Leffler type function, hypergeometric function, incomplete gamma function, Mellin – Barnes integral, degenerate hypergeometric Kummer function, Riemann–Liouville fractional integration, Erdelyi–Kober fractional integration

Acknowledgments: the author are thankful to the anonymous reviewer for his valuable remakes.

For citation. *F. G. Khushtova* On some formulas for fractional integration of one Fox function with four parameters. Adyghe Int. Sci. J. 2022. Vol. 22, No. 4. P. 29–38.
DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-4-29-38

1. Введение. Решения многих задач математической физики, техники и экономики выражаются через так называемые специальные функции. В теории специальных функций важное место занимают функции гипергеометрического типа. Многие из них могут быть записаны через G-функцию Мейера [1, с. 203]. Обобщением функции Мейера является H-функция Фокса [2, с. 528], [3, с. 1]. Исследованиям свойств этой функции посвящены достаточно много работ. Однако, при выводе некоторых формул при частных значениях её параметров, ввиду громоздкости записи функции Фокса, удобнее пользоваться упрощенными обозначениями. В данной работе рассматривается частный случай такой функции Фокса, содержащей четыре параметра.

2. Вспомогательные сведения. Далее в работе

$$\Gamma(s)=\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt, \quad \operatorname{Re}s>0, \tag{1}$$

– *гамма-функция* [3, с. 5], [4, с. 11], [1, с. 15],

$$B(a,b)=\int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt, \quad \operatorname{Re}a>0, \quad \operatorname{Re}b>0, \tag{2}$$

– *бета-функция* [4, с. 5], [5, с. 25], [1, с. 23]. Функции (1) и (2) связаны формулой [4, с. 9]

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Пусть $\varphi(x)\in L(a,b)$, $\alpha>0$.

Определение 2.1. *Операторы дробного интегрирования Римана–Лиувилля* порядка α от функции $\varphi(x)$ определяются по формулам [6, с. 9], [7, с. 14]

$$D_{ax}^{-\alpha}\varphi(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt,$$

$$D_{bx}^{-\alpha}\varphi(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^b (t-x)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt.$$

В монографиях [8, с. 42], [9, с. 44], [10, с. 69] для операторов дробного интегрирования Римана–Лиувилля приняты обозначения $\left(I_{a+}^{\alpha}\varphi\right)(x)$, $\left(I_{b-}^{\alpha}\varphi\right)(x)$ соответственно.

Определение 2.2. *Операторы дробного интегрирования Эрдейи–Кобера* от функции $\varphi(x)$ определяются по формулам [8, с. 246], [9, с. 46], [10, с. 105]:

$$I_{0+;2,\beta}^{\alpha}\varphi(x)=\frac{2}{\Gamma(\alpha)}\,x^{-2(\alpha+\beta)}\int\limits_0^x (x^2-t^2)^{\alpha-1}t^{2\beta+1}\varphi(t)\,dt,$$

$$I_{-;2,\beta}^{\alpha}\varphi(x)=\frac{2}{\Gamma(\alpha)}\,x^{2\beta}\int\limits_x^\infty (x^2-t^2)^{\alpha-1}t^{1-2(\alpha+\beta)}\varphi(t)\,dt.$$

Известны равенства [11, с. 238]

$$\int\limits_0^x (x^p-t^p)^{a-1}t^{b-1}dt=x^{p(a-1)+b}p^{-1}B\left(a,\frac{b}{p}\right), \quad p>0,\ \operatorname{Re}a>0,\ \operatorname{Re}b>0, \tag{3}$$

$$\int\limits_x^\infty (x^p-t^p)^{a-1}t^{b-1}dt=x^{p(a-1)+b}p^{-1}B\left(a,1-a-\frac{b}{p}\right), \quad p>0,\ 1-\operatorname{Re}b/p>\operatorname{Re}a>0. \tag{4}$$

3. Функция Фокса с четырьмя параметрами. Пусть $0 < \rho \leqslant 2$, μ, σ и $r \in \mathbb{C}$, $(\sigma + r)/2 \notin \mathbb{Z}$. Рассмотрим функцию от комплексного переменного z

$$\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(z) = H_{2,3}^{2,1}\left[\left(\frac{z}{2}\right)^2 \,\middle|\, \begin{matrix}\left(1-\sigma/2,1\right),\,\left(\mu-\rho\,\sigma/2,\rho\right)\\ \left(r/2,1\right),\,\left(1-\sigma/2,1\right),\,\left(-r/2,1\right)\end{matrix}\right], \tag{5}$$

где $H_{2,3}^{2,1}[...]$ – H*-функция Фокса* [2, с. 528], [3, с. 1], [12, с. 2], [10, с. 58].

Некоторые свойства функции (5), такие как представление в виде контурного интеграла, представление в виде степенного ряда, асимптотические свойства, формулы дифференцирования, некоторые рекуррентные соотношения, рассмотрены в работах [13], [14].

Для функции (5) имеет место представление через интеграл Меллина–Барнса

$$\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \Theta(s)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s} ds, \tag{6}$$

где

$$\Theta(s) = \frac{\Gamma\left(r/2+s\right)\Gamma\left(1-\sigma/2+s\right)\Gamma\left(\sigma/2-s\right)}{\Gamma\left(\mu-\rho\sigma/2+\rho s\right)\Gamma\left(1+r/2-s\right)},$$

$$L = L_{i\omega\infty} = (\omega - i\infty, \omega + i\infty), \quad \omega_1 < \omega < \omega_2,$$

$$\omega_1 = -\min\{\operatorname{Re} r/2, 1 - \operatorname{Re}\sigma/2\}, \quad \omega_2 = \operatorname{Re}\sigma/2.$$

Интеграл (6) абсолютно сходится, если:

$$\rho < 2, \quad |\arg z| < \pi\left(1-\rho/2\right)/2, \quad z \neq 0,$$

$$\rho \leqslant 2, \quad |\arg z| = \pi\left(1-\rho/2\right)/2, \quad (\rho-2)\,\omega > \rho\operatorname{Re}\sigma/2 - \operatorname{Re}\mu + 1/2, \quad z \neq 0.$$

Справедливы асимптотические разложения

$$\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(z) = a_0\left(\frac{z}{2}\right)^r + b_0\left(\frac{z}{2}\right)^{2-\sigma} + o(z^\delta), \quad z \to 0, \tag{7}$$

где $\delta = \min\left\{\operatorname{Re} r, 2 - \operatorname{Re}\sigma\right\}$,

$$a_0 = \frac{\Gamma\left(1-(r+\sigma)/2\right)\Gamma\left((r+\sigma)/2\right)}{\Gamma\left(\mu-\rho(r+\sigma)/2\right)\Gamma\left(1+r\right)}, \quad b_0 = \frac{\Gamma\left((r+\sigma)/2-1\right)}{\Gamma\left(\mu-\rho\right)\Gamma\left(2+(r-\sigma)/2\right)},$$

и

$$\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(z) = c_0\left(\frac{z}{2}\right)^{-\sigma} + o(z^{-\sigma}), \quad z \to \infty, \tag{8}$$

где

$$c_0 = \frac{\Gamma\left((r+\sigma)/2\right)}{\Gamma\left(\mu\right)\Gamma\left(1+(r-\sigma)/2\right)}.$$

4. Основные результаты. В этой работе, используя интегральное представление (6), докажем следующие свойства функции (5).

Свойство 4.1. *Пусть* $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\operatorname{Re}\mu > 0$. *Тогда справедлива формула*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^z (z-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\rho\sigma/2-1}\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}\left(t^{-\rho/2}\right)\,dt = z^{\mu+\alpha-\rho\sigma/2-1}\mathcal{J}_r^{\rho,\mu+\alpha,\sigma}\left(z^{-\rho/2}\right). \tag{9}$$

Доказательство. Из асимптотического разложения (8) следует

$$t^{\mu-\rho\sigma/2-1}\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}\left(t^{-\rho/2}\right)\sim t^{\mu-1},\quad t\to 0.$$

Тогда условия $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\operatorname{Re}\mu>0$ обеспечивают сходимость интеграла в (9).

Из представления (6) имеем

$$\int\limits_0^z (z-t)^{\alpha-1}t^{\mu-\rho\sigma/2-1}\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}\left(t^{-\rho/2}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^z (z-t)^{\alpha-1}t^{\mu-\rho\sigma/2-1}\int\limits_L \Theta(s)\left(\frac{t^{-\rho/2}}{2}\right)^{-2s}ds\,dt. \tag{10}$$

Меняя в (10) порядок интегрирования, получим

$$\int\limits_0^z (z-t)^{\alpha-1}t^{\mu-\rho\sigma/2-1}\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}\left(t^{-\rho/2}\right)\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L 2^{2s}\Theta(s)\int\limits_0^z (z-t)^{\alpha-1}t^{\mu-\rho\sigma/2+\rho s-1}dt\,ds. \tag{11}$$

Внутренний интеграл по формуле (3) равен

$$\int\limits_0^z (z-t)^{\alpha-1}t^{\mu-\rho\sigma/2+\rho s-1}dt=z^{\mu+\alpha-\rho\sigma/2+\rho s-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\mu-\rho\sigma/2+\rho s\right)}{2\Gamma\left(\mu+\alpha-\rho\sigma/2+\rho s\right)}.$$

Подставляя найденное значение в (11), находим

$$\int\limits_0^z (z-t)^{\alpha-1}t^{\mu-\rho\sigma/2-1}\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}\left(t^{-\rho/2}\right)\,dt=z^{\mu+\alpha-\rho\sigma/2-1}\frac{\Gamma(\alpha)}{2\pi i}\int\limits_L \Theta_1(s)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s}ds,$$

где

$$\Theta_1(s)=\frac{\Gamma\left(r/2+s\right)\Gamma\left(1-\sigma/2+s\right)\Gamma\left(\sigma/2-s\right)}{\Gamma\left(\mu+\alpha-\rho\sigma/2+\rho s\right)\Gamma\left(1+r/2-s\right)},$$

откуда следует равенство (9).

Свойство 4.2. *Пусть* $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\operatorname{Re}\mu>0$. *Тогда справедлива формула*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_z^b (t-z)^{\alpha-1}(b-t)^{\mu-\rho\sigma/2-1}\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}\left((b-t)^{-\rho/2}\right)\,dt=$$

$$=(b-z)^{\mu+\alpha-\rho\sigma/2-1}\mathcal{J}_r^{\rho,\mu+\alpha,\sigma}\left((b-z)^{-\rho/2}\right). \tag{12}$$

Доказательство. Интеграл в левой части (12) простой заменой переменной интегрирования $t=b-\tau$ сводится к интегралу в (9) с переменным верхним пределом $b-z$.

Свойство 4.3. *Пусть* $\operatorname{Re}q>0$ *и выполняются условия* $-1<\operatorname{Re}r<2-\operatorname{Re}\sigma$, *либо* $2-\operatorname{Re}r<\operatorname{Re}\sigma<4+\operatorname{Re}r$. *Тогда справедлива формула*

$$\frac{2^{1-q}}{\Gamma(q)}\int\limits_0^z (z^2-t^2)^{q-1}t^{r+1}\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(t)\,dt=z^{r+q}\mathcal{J}_{r+q}^{\rho,\mu,\sigma-q}(z). \tag{13}$$

Доказательство. Если $\operatorname{Re} r < 2 - \operatorname{Re}\sigma$, то из (7) следует

$$t^{r+1}\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(t) \sim t^{2r+1}, \quad t \to 0,$$

откуда для сходимости интеграла в (13) в точке $t = 0$ необходимо, чтобы $\operatorname{Re} r > -1$. Если $\operatorname{Re} r > 2 - \operatorname{Re}\sigma$, то

$$t^{r+1}\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(t) \sim t^{3+r-\sigma}, \quad t \to 0.$$

В этом случае необходимо $\operatorname{Re}\sigma < 4 + \operatorname{Re} r$.

Из представления (6) имеем

$$\int\limits_0^z t^{r+1}(z^2 - t^2)^{q-1}\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^z t^{r+1}(z^2 - t^2)^{q-1}\int\limits_L \Theta(s)\left(\frac{t}{2}\right)^{-2s} ds\,dt. \tag{14}$$

Меняя в (14) порядок интегрирования, получим

$$\int\limits_0^z t^{r+1}(z^2 - t^2)^{q-1}\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L 2^{2s}\Theta(s)\int\limits_0^z t^{r+1-2s}(z^2 - t^2)^{q-1}dt\,ds. \tag{15}$$

Внутренний интеграл по формуле (3) равен

$$\int\limits_0^z t^{r+1-2s}(z^2 - t^2)^{q-1}dt = z^{2q+r-2s}\frac{\Gamma(q)\Gamma\left(1 + r/2 - s\right)}{2\Gamma\left(1 + r/2 + q - s\right)}.$$

Подставляя найденное значение в (15) и меняя переменную интегрирования по формуле $s = q/2 + \tau$, находим

$$\int\limits_0^z t^{r+1}(z^2 - t^2)^{q-1}\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(t)\,dt = \frac{2^{q-1}\Gamma(q)}{2\pi i}z^{r+q}\int\limits_{L_1}\Theta_2(\tau)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2\tau} d\tau, \tag{16}$$

где

$$\Theta_2(\tau) = \frac{\Gamma\left((r+q)/2 + \tau\right)\Gamma\left(1 - (\sigma - q)/2 + \tau\right)\Gamma\left((\sigma - q)/2 - \tau\right)}{\Gamma\left(\mu - \rho(\sigma - q)/2 + \rho\tau\right)\Gamma\left(1 + (r+q)/2 - \tau\right)},$$

$$L_1 = (\omega - i\infty, \omega + i\infty), \quad \omega_3 < \omega < \omega_4,$$

$$\omega_3 = -\min\{\operatorname{Re}(r+q)/2, 1 - \operatorname{Re}(\sigma - q)/2\}, \quad \omega_4 = \operatorname{Re}(\sigma - q)/2.$$

Сравнивая правую часть (16) с представлением (6), приходим к (13).

Свойство 4.4. *Пусть* $\operatorname{Re}(r+\sigma)/2 > \operatorname{Re} q > 0$. *Тогда справедлива формула*

$$\frac{2^{1-q}}{\Gamma(q)}\int\limits_z^\infty (t^2 - z^2)^{q-1}t^{1-r}\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(t)\,dt = z^{q-r}\mathcal{J}_{r-q}^{\rho,\mu,\sigma-q}(z). \tag{17}$$

Доказательство. Из асимптотического разложения (8) следует

$$(t^2 - z^2)^{q-1}t^{1-r}\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(t) \sim t^{2q-r-\sigma-1}, \quad t \to \infty.$$

Сходимость интеграла в (17) при этом обеспечивают условия $\operatorname{Re}(r+\sigma)/2 > \operatorname{Re} q > 0$.

Из представления (6) имеем

$$\int_z^\infty t^{1-r}(t^2-z^2)^{q-1}\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_z^\infty t^{1-r}(t^2-z^2)^{q-1}\int_L \Theta(s)\left(\frac{t}{2}\right)^{-2s} ds\,dt. \tag{18}$$

Меняя в (18) порядок интегрирования, получим

$$\int_z^\infty t^{1-r}(t^2-z^2)^{q-1}\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_L 2^{2s}\Theta(s)\int_z^\infty t^{1-r-2s}(z^2-t^2)^{q-1}dt\,ds. \tag{19}$$

Внутренний интеграл по формуле (4) равен

$$\int_z^\infty t^{1-r-2s}(z^2-t^2)^{q-1}dt = z^{2q-r-2s}\frac{\Gamma(q)\Gamma\left(r/2-q+s\right)}{2\Gamma\left(r/2+s\right)}.$$

Подставляя найденное значение в (19) и меняя переменную интегрирования по формуле $s = q/2+\tau$, находим

$$\int_z^\infty t^{1-r}(t^2-z^2)^{q-1}\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(t)\,dt = \frac{2^{q-1}\Gamma(q)}{2\pi i}z^{q-r}\int_{L_2}\Theta_3(\tau)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2\tau}d\tau, \tag{20}$$

где

$$\Theta_3(\tau) = \frac{\Gamma\left((r-q)/2+\tau\right)\Gamma\left(1-(\sigma-q)/2+\tau\right)\Gamma\left((\sigma-q)/2-\tau\right)}{\Gamma\left(\mu-\rho(\sigma-q)/2+\rho\tau\right)\Gamma\left(1+(r-q)/2-\tau\right)},$$

$$L_2 = (\omega-i\infty,\omega+i\infty), \quad \omega_5<\omega<\omega_6,$$

$$\omega_5 = -\min\{\operatorname{Re}(r-q)/2, 1-\operatorname{Re}(\sigma-q)/2\}, \quad \omega_6 = \operatorname{Re}(\sigma-q)/2.$$

Сравнивая правую часть (20) с представлением (6), приходим к (17).

5. Частные случаи. Придавая параметрам ρ, μ и σ в (6) соответствующие частные значения и учитывая представления через интеграл Меллина–Барнса получающихся функций, нетрудно получить некоторые известные элементарные и специальные функции. Например, при $\rho=\mu=1$ из (6) получим [15, с. 74, 108, 168]

$$\mathcal{J}_r^{1,1,2+r}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^r \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right), \tag{21}$$

$$\mathcal{J}_r^{1,1,r}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-r}\gamma\left(r;\frac{z^2}{4}\right), \tag{22}$$

$$\mathcal{J}_r^{1,1,2-r}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^r E_{1,1+r}\left(-\frac{z^2}{4}\right), \tag{23}$$

$$\mathcal{J}_r^{1,1,\sigma}(z) = \frac{\Gamma\left((\sigma+r)/2\right)}{\Gamma\left(1+r\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^r {}_1F_1\left((\sigma+r)/2;1+r;-\frac{z^2}{4}\right). \tag{24}$$

Здесь $\gamma\,(r;z)$ – неполная гамма-функция [1, с. 254], $E_{\rho,\mu}\,(z)$ – функция типа Миттаг–Леффлера [16, с. 117], [12, с. 8], ${}_1F_1\,(a;c;z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция Куммера [1, с. 237], [15, с. 73].

Функции (21) и (24) по формулам (13) и (17) будут связаны известными равенствами [11, с. 260, 261]

$$\frac{2^{1-2q}}{\Gamma(q)}\int\limits_z^{\infty}(t^2-z^2)^{q-1}t\exp\left(-\frac{t^2}{4}\right)dt=\exp\left(-\frac{z^2}{4}\right),\quad \operatorname{Re}q>0,$$

$$2^{1+r}\int\limits_0^{z}(z^2-t^2)^{q-1}t^{2r+1}\exp\left(-\frac{t^2}{4}\right)dt=$$

$$=B\,(1+r,q)\,z^{2(r+q)}{}_1F_1\left(1+r,1+r+q;-\frac{z^2}{4}\right),\quad \operatorname{Re}r>-1,\ \operatorname{Re}q>0,$$

функции (22) и (24) – равенствами [17, с. 143]

$$\frac{2}{\Gamma(q)}\int\limits_z^{\infty}(t^2-z^2)^{q-1}t^{1-2r}\gamma\left(r;\frac{t^2}{4}\right)dt=z^{2(q-r)}\gamma\left(r-q;\frac{z^2}{4}\right),\quad \operatorname{Re}r>\operatorname{Re}q>0,$$

$$\frac{2^{2r+1}}{\Gamma(q)}\int\limits_0^{z}(z^2-t^2)^{q-1}t\gamma\left(r;\frac{t^2}{4}\right)dt=$$

$$=\frac{\Gamma(r)}{\Gamma(1+r+q)}z^{2(r+q)}{}_1F_1\left(r,1+r+q;-\frac{z^2}{4}\right),\quad \operatorname{Re}r>-1,\ \operatorname{Re}q>0.$$

функции (23) и (24) – равенствами [17, с. 143], [16, с. 120]

$$\frac{2^{1-2q}}{\Gamma(q)}\int\limits_z^{\infty}(t^2-z^2)^{q-1}t^{1-2r}E_{1,1+r}\left(-\frac{t^2}{4}\right)dt=\frac{\Gamma(1-q)}{\Gamma(1+r-q)}z^{2(q-r)}{}_1F_1\left(1-q,1+r+q;-\frac{z^2}{4}\right),$$

$$0<\operatorname{Re}q<1,$$

$$\frac{2}{\Gamma(q)}\int\limits_0^{z}(z^2-t^2)^{q-1}t^{2r+1}E_{1,1+r}\left(-\frac{t^2}{4}\right)dt=z^{2(r+q)}E_{1,1+r+q}\left(-\frac{z^2}{4}\right),\quad \operatorname{Re}r>-1,\ \operatorname{Re}q>0.$$

Список использованных источников

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. I. М.: Наука, 1965. 296 с.
2. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 3. Дополнительные главы. М.: Физматлит, 2003. 688 с.
3. *Kilbas A. A., Saigo M.* H-Transform. Theory and Applications. London, New York and Washington: Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, D.C., 2004. 389 p.
4. *Кузнецов Д. С.* Специальные функции. М.: Высшая школа, 1965. 248 с.

5. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. М.: Физматлит, 1963. 358 с.
6. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
7. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
8. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн.: Наука и техника, 1987. 688 с.
9. *Ситник С. М., Шишкина Э. Л.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. М.: Физматлит, 2019. 224 с.
10. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North Holland Mathematics Studies, 204. Amsterdam: Elsevier Science, Publishers BV, 2006. 499 p.
11. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. Т. 1. М.: Физматлит, 2002. 632 с.
12. *Mathai A. M., Saxena R. K., Haubold H. J.* The H-function. Theory and Applications. New York: Springer, 2010. 268 p.
13. *Хуштова Ф.Г.* Формулы дифференцирования и формула автотрансформации для одного частного случая функции Фокса // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2020. Т. 20, № 4. С. 15–18.
14. *Хуштова Ф. Г.* О некоторых свойствах одной специальной функции // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2022. Т. 22, № 2. С. 34–40.
15. *Маричев О. И.* Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул). Мн.: Наука и техника, 1978. 312 с.
16. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 671 с.
17. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 2. Специальные функции. М.: Физматлит, 2003. 664 с.

Поступила 13.12.2022; одобрена после рецензирования 21.12.2022; принята к публикации 24.12.2022.

Об авторе:

Хуштова Фатима Гидовна, научный сотрудник отдела Дробного исчисления Института прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, (360017, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова 89 А), к.ф.-м.н., http://orcid.org/0000-0003-4088-3621, khushtova@yandex.ru

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

References

1. *H. Bateman, A. Erdeyi* Higher Transcendental Functions. V. I. New York, Toronto, London, McGraw-Hill Book Company. 1953. 302 p.
2. *A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev* Integraly i ryady. Dopolnitel'nye glavy [Integrals and series. Additional chapters]. V. 3. M.: Fizmatlit, 2003. 688 p.
3. *A. A. Kilbas, M. Saigo* H-Transform. Theory and Applications. London, New York and Washington: Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, D.C., 2004. 389 p.
4. *D. S. Kuznetsov* Spetsial'nye funktsii [Special functions]. M.: Vysshaya shkola, 1965. 424 p.
5. *N. N. Lebedev* Spetsial'nye funktsii i ikh prilozheniya [Special functions and their applications]. M.: Fizmatlit, 1963. 358 p.

6. *A. M. Nakhushev* Drobnoe ischislenie i ego primenenie [Fractional calculus and its application]. M.: Fizmatlit, 2003. 272 p.
7. *A. V. Pskhu* Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka [Fractional Partial Differential Equations]. M.: Nauka, 2005. 199 p.
8. *S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev* Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. Gordon and Breach, Yverdon, 1993. 1016 p.
9. *S. M. Sitnik, S. M. Shishkina* Metod operatorov preobrazovaniya dlya differentsial'nykh uravneniy s operatorami Besselya [Method of transformation operators for differential equations with Bessel operators]. M.: Fizmatlit, 2019. 224 p.
10. *A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North Holland Mathematics Studies, 204. Amsterdam: Elsevier Science, Publishers BV, 2006. 499 p.
11. *A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev* Integraly i ryady. Elementarnye funktsii [Integrals and series. Elementary Functions]. V. 1. M.: Fizmatlit, 2002. 632 p.
12. *A. M. Mathai, R. K. Saxena, H. J. Haubold* The H-function. Theory and Applications. New York: Springer, 2010. 268 p.
13. *F. G. Khushtova* Formuly differentsirovaniya i formula avtotransformatsii dlya odnogo chastnogo sluchaya funktsii Foksa [Differentiation formulas and an autotransformation formula for one particular case of the Fox function]. Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy akademii nauk. 2020. V. 20, No. 4. P. 15–18.
14. *F. G. Khushtova* O nekotorykh svoystvakh odnoy spetsial'noy funktsii [On some properties of one special function]. Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy akademii nauk. 2022. V. 22, No. 2. P. 34–40.
15. *O. I. Marichev* Handbook of integral transforms of higher transcendental functions: theory and algorithmic tables, Ellis Horwood Ltd., Chichester, New York: Halsted Press, 1983. 336 p.
16. *M. M. Dzhrbashyan* Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funktsiy v kompleksnoy oblasti [Integral transformations and representations of functions in the complex domain]. M.: Nauka. 1966. 671 p.
17. *A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev* Integraly i ryady. Spetsial'nye funktsii [Integrals and series. Special Functions]. V. 2. M.: Fizmatlit, 2003. 664 p.

Submitted 13.12.2022; approved after reviewing 21.12.2022; accepted for publication 24.12.2022.

About the author:

Fatima Gidovna Khushtova, Researcher of Department of Fractional Calculus, Institute of Applied Mathematics and Automation of KBSC RAS, (360017, 89 A Shortanova St., Nalchik, Russia), Ph.D., http://orcid.org/0000-0003-4088-3621, khushtova@yandex.ru

The author has read and approved the final version of the manuscript.