МАТЕМАТИКА

УДК 517.512

# Об одной конструкции неограниченного оператора

*Маршан Р.Б.*

Представлено академиком АМАН А.А. Гварамия

Пусть $A_0 = \{[0,1),\ [0,\frac{1}{2}),\ [\frac{1}{2},1),\ [0,\frac{1}{4}),\ [\frac{1}{4},\frac{1}{2}),\ [\frac{1}{2},\frac{3}{4}),\ [\frac{3}{4},1),\ldots\}$ – множество всех, двоичных полусегментов, открытых справа, $A = A_0 \cup \{[0,1]\}$, и $\{h_I,\ I \in A\}$ – система Хаара, занумерованная элементами множества $A$ так: $h_{[0,1]}(t) = 1,\ t \in [0,1)$, а для $I \in A_0$ значения функции $h_I$(t) определены так:

$h_I\left(t\right) = \begin{cases} |I|^{-\frac{1}{2}}, t \in I^+, \\ -|I|^{-\frac{1}{2}}, t \in I^-, \\ 0,\ t \in [0,1] \backslash I, \end{cases}$ где $I^+(I^-)$ - левая (правая) половина элемента $I$, $I^+(I^-) \in A_0$,

$|I|$ - мера Лебега множества $I$.

Каждая биекция $\pi : A \to A$ порождает оператор перестановки системы Хаара:

$$R_\pi f = \sum_{I \in A} f_I h_{\pi(I)}, \quad f_I = \int\limits_0^1 f(t) h_I(t) dt, I \in A.$$

Биекцию $\pi\colon A \to A$ называют сохраняющей меру, если для каждого $I \in A$ имеем $|\pi(I)| = |I|$, $\pi([0,1]) = [0,1]$.

Вопросы ограниченности операторов $R_\pi$ изучались в [1], [2].

Нами доказана

**Теорема.** Существует такая сохраняющая меру биекция $\pi : A \to A$, что оператор $R_\pi : L^p \to L^q$ неограничен для всех $p, q \in [1,2)$ и всех $p, q \in (2,\infty)$.

Приведем пример сохраняющей меру биекции $\pi : A \to A$, удовлетворяющей этой теореме.

Разобьем $[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}), k = 1,2,3,\ldots,$ на $2^m$ $(m \geq 2^k)$ частей - элементов из $A_0$ равной меры и обозначим их в соответствии с расположением на числовой прямой так:

$$I_m^{(k)1}, \quad I_m^{(k)2}, \quad I_m^{(k)3}, \ldots, \quad I_m^{(k)2^m}.$$

Определим искомую биекцию $\beta : A \to A$ следующим образом:

Пусть при каждом $k = 1,2,3,\ldots,$ имеет место система равенств

$$\beta(I_{2^k+n}^{(k)j}) = I_{2^k+n}^{(k)j+(n+1)2^n}, \quad \beta(I_{2^k+n}^{(k)j+(n+1)2^n}) = I_{2^k+n}^{(k)j},$$

при каждом $n = \overline{0, 2^{2^k} - 2}$, $j = \overline{1, 2^n}$.

Для всякого $I \in A$, отсутствующего в этих равенствах, полагаем $\beta(I) = I$. Биекция $\beta : A \to A$ определена полностью.

В приведенных равенствах верхний индекс в круглых скобках $(k)$ и нижний индекс $2^k + n$ образов и прообразов биекции $\beta : A \to A$ совпадают. Поэтому при каждом $k = 1,2,3,\ldots$

$$\left|I_{2^k+n}^{(k)j}\right| = \left|I_{2^k+n}^{(k)j+(n+1)2^n}\right|, \text{при каждом} \quad n = \overline{0, 2^{2^k} - 2}, \quad j = \overline{1, 2^n}.$$

Для всякого $I \in A$, отсутствующего в этих равенства $|\beta(I)| = |I|$, так как $\beta(I) = I$ для указанных $I \in A$.

Из равенства мер всех образов и соответствующих прообразов биекции $\beta : A \to A$ следует, что $\beta : A \to A$ - сохраняющая меру биекция.

Построенный нами оператор $R_\beta : L^p \to \quad L^q$ неограничен для всех $p, q \in [1, 2)$ и всех $p, q \in (2, \infty)$, где $\beta : A \to A$ сохраняющая меру биекция.

**Замечание.** Существование неограниченных операторов $R_\pi : L^p \to L^p, p \in (1, 2) \cup (2, \infty)$ было доказано В.Ф. Гапошкиным [1]. Построенный нами оператор $R_\beta : L^p \to L^q$ неограниченный для всех $p, q \in [1, 2)$ и всех $p, q \in (2, \infty)$, где $\beta : A \to A$ сохраняющая меру биекция, обобщает это свойство системы Хаара в классе сохраняющих меру биекций.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Гапошкин В.Ф.* Об одном свойстве безусловных базисов в пространстве $L^p$ // Успехи матем. наук. 1959. Т. 14. С. 143-148.
2. *Schipp F.* On equivalence of rearrangements of the Haar system in dyadic Hardy and BMO spaces // Analysis Math. 1990. V. 16. Pp. 135-141.

## ABSTRACT

The paper presents a construction for an unbounded permutation operator of the Haar system.

**Keywords.**

Permutation operator, Haar system, unbounded operator.

*Abkhazian State University, Sukhum; ramgar28@rambler.ru*



## АННОТАЦИЯ

В работе приводится конструкция неограниченного оператора перестановки системы Хаара.

**Ключевые слова.**

Неограниченный оператор, биекция, мера, система Хаара.

*Абхазский Государственный Университет, г. Сухум; ramgar28@rambler.ru*