МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

О единственности решения задачи Дирихле для обобщенного уравнения Лаврентьева-Бицадзе с дробной производной

Масаева О.Х.
Представлено академиком АМАН А.М. Нахушевым

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - D^{\gamma}_{0y}\frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ 0 < \gamma < 1, \tag{1}$$

где D^{γ}_{0y}– оператор дифференцирования Римана-Лиувилля порядка γ [3]:

$$D^{s}_{0y}u(x,y) = \frac{\operatorname{sign} y}{\Gamma(-s)}\int\limits_0^y |y-t|^{-s-1}u(x,t)dt, \quad s<0,$$

$$D^{s}_{0y}u(x,y) = u(x,y),\ s=0,$$

$$D^{s}_{0y}u(x,y) = \operatorname{sign}^n y\frac{\partial^n}{\partial y^n}D^{s-n}_{0y}u(x,y), \quad n-1<s\le n,\ n\in\mathbb{N}.$$

В работах [2]–[4] исследована задача Дирихле для уравнений в частных производных второго порядка с оператором дробного дифференцирования Капуто ∂^{γ}_{0y} [3], которые обращаются в уравнение Лапласа и уравнение колебания струны при целом значении порядка дробного дифференцирования.

Задача Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе исследовалась в работах [5]-[9] и др. (см. библиографию, приведенную в [7]-[10]).

В данной работе доказывается единственность решения задачи Дирихле для уравнения (1) в прямоугольной области, в которой, в случае целого значения порядка дробного дифференцирования ($\gamma = 1$), исследуемое уравнение обращается в уравнение Лаврентьева-Бицадзе.

Пусть $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < r,\ \alpha < y < \beta\}$, $\alpha < 0, \beta > 0$, $\Omega^+ = \Omega\cap\{y>0\}$, $\Omega^- = \Omega\cap\{y<0\}$.

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u(x,y)$ из класса $u\in C(\bar{\Omega})$, $D^{\gamma-1}_{0y}u_y \in C(\Omega)$, $u_{xx}, D^{\gamma}_{0y}u_y \in C(\Omega^-\cup\Omega^+)$, удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(x,y)\in\Omega^-\cup\Omega^+$.

Задача Дирихле. *Найти в области Ω регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u(0,y) = \psi_0(y), \quad u(r,y) = \psi_r(y), \quad \alpha<y<\beta \tag{2}$$

$$u(x,\alpha) = \varphi_\alpha(x), \quad u(x,\beta) = \varphi_\beta(x), \quad 0<x<r. \tag{3}$$

Рассмотрим функцию типа Миттаг-Леффлера [11]

$$E_{1/\rho}(z;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\rho k+\mu)}, \quad \rho>0,\ \mu\in\mathbb{C}. \tag{4}$$

Известно, что функция (4) при любых $\rho < 2$, $\mu \in \mathbb{C}$ может иметь лишь конечное число действительных нулей; в случае, когда $1 < \rho < 2$, $\mu = \rho$ и $\mu = 1$ множество действительных нулей функции (4) не пусто [12].

В дальнейшем мы будем использовать асимптотические разложения функции (4). Если $0 < \rho < 2$ и $|z| \to \infty$, то справедливы формулы [11]:

$$E_{1/\rho}(z;\mu) = 1/\rho z^{(1-\mu)/\rho} e^{z^{1/\rho}} -$$

$$-\sum_{k=1}^{n} z^{-k}/\Gamma(\mu-\rho k) + O\left(|z|^{-n-1}\right), \quad |\arg z| \le \rho_1\pi, \tag{5}$$

$$E_{1/\rho}(z;\mu) = -\sum_{k=1}^{n} z^{-k}/\Gamma(\mu-\rho k) + O\left(|z|^{-n-1}\right), \quad \pi \ge |\arg z| \ge \rho_1\pi, \tag{6}$$

где $\rho \in (0,2)$, $\rho_1 \in (\rho/2, \min\{1,\rho\})$.

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть* $t_1 = \max\{t \in \mathbb{R} : E_{1/\nu}(-t;\nu) = 0\}$, $t_2 = \max\{t \in \mathbb{R} : E_{1/\nu}(-t;1) = 0\}$, $\nu = \gamma + 1$, $k = \max\{t_1, t_2\}$ *и*

$$\frac{\beta^\nu}{r^2} \ge \frac{k}{\pi^2}, \tag{7}$$

тогда однородная задача Дирихле (1) – (3) имеет только тривиальное решение.

Доказательство. Покажем, что при условиях теоремы выполняется необходимое и достаточное условие единственности решения задачи Дирихле (1)–(3), полученное ранее в работе [13]: *однородная задача (1)–(3) имеет только тривиальное решение тогда и только тогда, когда*

$$\beta^{\nu-1} E_{1/\nu}(-\lambda_\beta;\nu)\, E_{1/\nu}(\lambda_\alpha;1) \ne -|\alpha|^{\nu-1} E_{1/\nu}(\lambda_\alpha;\nu)\, E_{1/\nu}(-\lambda_\beta;1), \tag{8}$$

где $\lambda_\alpha = (\pi n)^2 |\alpha|^\nu / r^2$, $\lambda_\beta = (\pi n)^2 \beta^\nu / r^2$, $n = 1, 2, ...$

Поскольку

$$E_{1/\nu}(\lambda_\alpha;1) > 0 \quad \text{и} \quad E_{1/\nu}(\lambda_\alpha;\nu) > 0,$$

при $\lambda_\alpha, \lambda_\beta > 0$, наличие корней уравнения

$$\beta^{\nu-1} E_{1/\nu}(-\lambda_\beta;\nu)\, E_{1/\nu}(\lambda_\alpha;1) +$$

$$+|\alpha|^{\nu-1} E_{1/\nu}(\lambda_\alpha;\nu)\, E_{1/\nu}(-\lambda_\beta;1) = 0,$$

зависит от поведения функций

$$E_{1/\nu}(-\lambda_\beta;\nu), \quad E_{1/\nu}(-\lambda_\beta;1).$$

Из формулы (5) вытекают разложения

$$E_{1/\nu}(\lambda_\alpha;1) = \frac{1}{\nu} e^{\lambda_\alpha^{1/\nu}} + O\left(1/\lambda_\alpha\right),$$

$$E_{1/\nu}(\lambda_\alpha;\nu) = \frac{1}{\nu} \lambda_\alpha^{1/\nu(1-\nu)} e^{\lambda_\alpha^{1/\nu}} + O\left(1/\lambda_\alpha^2\right).$$

Учитывая их и разложения

$$E_{1/\nu}(-\lambda_\beta;\nu) = -\frac{\lambda_\beta^{-2}}{\Gamma(-\nu)} + O\left(1/\lambda_\beta^3\right),$$

$$E_{1/\nu}(-\lambda_\beta;1) = \frac{\lambda_\beta^{-1}}{\Gamma(1-\nu)} + O\left(1/\lambda_\beta^2\right),$$

получаемые с помощью формул (6), приходим к формулам

$$\lim_{n\to\infty} E_{1/\nu}(-\lambda_\beta;\nu)E_{1/\nu}(\lambda_\alpha;1) = -\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} E_{1/\nu}(\lambda_\alpha;\nu)E_{1/\nu}(-\lambda_\beta;1) = -\infty.$$

Тогда, если $\lambda_\beta > t_1$,

$$E_{1/\nu}(-\lambda_\beta;\nu)E_{1/\nu}(\lambda_\alpha;1) < 0,$$

если $\lambda_\beta > t_2$, то

$$E_{1/\nu}(\lambda_\alpha;\nu)E_{1/\nu}(-\lambda_\beta;1) < 0.$$

Поэтому, в силу условия (7)

$$\beta^{\nu-1}E_{1/\nu}\left(-\lambda_\beta;\nu\right)E_{1/\nu}\left(\lambda_\alpha;1\right) +$$

$$+|\alpha|^{\nu-1}E_{1/\nu}\left(\lambda_\alpha\nu\right)E_{1/\nu}\left(-\lambda_\beta;1\right) < 0,\ n = 1,2,...,$$

что согласуется с (8). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.
2. *Масаева О.Х.* Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа с производной Капуто// Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 3. С. 442-446.
3. *Масаева О.Х.* Задача Дирихле для нелокального волнового уравнения// Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 12. С. 1554-1559.
4. *Масаева О.Х.* Необходимое и достаточное условие единственности решения задачи Дирихле для нелокального волнового уравнения// Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 11, № 2. С. 16-20.
5. *Бицадзе А.В.* Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в смешанных областях// Докл. АН СССР. 1958. Т. 122, № 2. С. 167-170.
6. *Cannon J.R.* A Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinuous coefficient. Ann. de Math. pura ed Appl. 1963. 61, 371-377.
7. *Солдатов А.П.* Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. I: Теоремы единственности// Докл. РАН. 1993. Т. 332, № 6. С. 696-698.
8. *Солдатов А.П.* Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. II: Теоремы существования// Докл. РАН. 1993. Т. 333, № 1. С. 16-18.
9. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.
10. *Хачев М.М.* Первая краевая задача для линейных уравнений смешанного типа. Нальчик: Эльбрус, 1998. 168 с.
11. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.
12. *Псху А.В.* О вещественных нулях функции типа Миттаг-Леффлера // Матем. заметки. 2005. Т. 77, Вып. 4. С. 592-599.

13. *Масаева О.Х.* Задача Дирихле для нагруженного дифференциального уравнения// Докл. Адыг. (Черкес.) Междунар. акад. наук. 2011. Т. 13, № 2. С. 38-40.

ABSTRACT

The paper is devoted to the study of the solution uniqueness of the Dirichlet problem for a generalized Lavrent'ev-Bitsadze equation with fractional derivative. The considered equation transforms into the mixed type equation in case when the fractional derivative order is integer.

Key words.

Mittag-Leffler function, real root, Dirichlet problem.

Institute of Applied Mathematics and Automation, Nalchik; olesya.masaeva@ya.ru

АННОТАЦИЯ

Работа посвящена исследованию единственности решения задачи Дирихле для уравнения с дробной производной. Рассматриваемое уравнение обращается в уравнение смешанного типа в случае целого значения порядка дробного дифференцирования.

Ключевые слова.

Функция типа Миттаг-Леффлера, вещественные корни, задача Дирихле.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение "Институт прикладной математики и автоматизации", г. Нальчик; olesya.masaeva@ya.ru