МАТЕМАТИКА

УДК 517.91

Интегральные представления и асимптотические формулы для обобщенной функции Миттаг-Леффлера

Мажгихова М.Г.
Представлено академиком АМАН А.В. Псху

Обобщенная функция Миттаг-Леффлера

$$E^{\rho}_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\rho)_k z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!},$$

где $(\rho)_k$ – символ Похгаммера, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, была вперые рассмотрена в работе [1]. В частности, при $\rho=1$, из общенной функции Миттаг-Леффлера получается функция Миттаг-Леффлера:

$$E^{1}_{\alpha,\beta}(z)=E_{\alpha,\beta}(z).$$

Для обобщенной функции Миттаг-Леффлера справедливость соотношения

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^m [E_{\alpha,\beta}(\lambda)]=m!E^{m+1}_{\alpha,\alpha m+\beta}(\lambda) \tag{1}$$

была доказана в работе [2]. Для функции Миттаг-Леффлера интегральные представления и асимптотические формулы впервые доказаны в [3, с. 134].

В данной работе выводятся интегральные представления и асимптотические формулы для обобщенной функции Миттаг-Леффлера.

1. Интегральные предствления обобщенной функции Миттаг-Леффлера. Через $\gamma(r,\omega\pi)$ $(r>0, 0<\omega\leq 1)$ обозначим контур, пробегаемый в направлении неубывания $\arg p$ и состоящий из следующих частей:

1. луч $\arg p=-\omega\pi$, $|p|\geq r$;

2. дуги $-\omega\pi<\arg p\leq\omega\pi$ окружности $|p|=r$;

3. луч $\arg p=\omega\pi$, $|p|\geq r$.

В случае $0<\omega\leq 1$ контур $\gamma(r,\omega\pi)$ разбивает плоскость p на G^- и G^+, лежащие слева и справа соответственно от $\gamma(r,\omega\pi)$.

Интегральные представления для функции Миттаг-Лефлера получены в работе [3, с. 127]: пусть $\alpha<2$, β– произвольное комплексное число, а также выполняется неравенство

$$\frac{\pi\alpha}{2}<\theta<min\{\pi,\pi\alpha\}.$$

Тогда если $\lambda\in G^-(r,\theta)$, то

1.

$$E_{\alpha,\beta}(\lambda)=\frac{1}{2\pi i\alpha}\int\limits_{\gamma(r,\theta)}\frac{\exp{(p^{\frac{1}{\alpha}})}p^{\frac{1-\beta}{\alpha}}}{p-\lambda}dp; \tag{2}$$

если $\lambda\in G^+(r,\theta)$, то

2.

$$E_{\alpha,\beta}(\lambda)=\frac{1}{\alpha}\lambda^{\frac{1-\beta}{\alpha}}\exp{(\lambda^{\frac{1}{\alpha}})}+\frac{1}{2\pi i\alpha}\int\limits_{\gamma(r,\theta)}\frac{\exp{(p^{\frac{1}{\alpha}})}p^{\frac{1-\beta}{\alpha}}}{p-\lambda}dp. \tag{3}$$

Учитывая соотношение (1), связывающее функцию Миттаг-Леффлера с обобщенной функцией Миттаг-Леффлера, продифференцируем по λ представление (2). Получим:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^m [E_{\alpha,\beta}(\lambda)] = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^m \left[\frac{1}{2\pi i\alpha}\int\limits_{\gamma(r,\theta)} \frac{\exp{(p^{\frac{1}{\alpha}})}p^{\frac{1-\beta}{\alpha}}}{p-\lambda}dp\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i\alpha}\int\limits_{\gamma(r,\theta)} \exp{(p^{\frac{1}{\alpha}})}p^{\frac{1-\beta}{\alpha}}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^m \left[\frac{1}{p-\lambda}\right]dp = \frac{m!}{2\pi i\alpha}\int\limits_{\gamma(r,\theta)} \frac{\exp{(p^{\frac{1}{\alpha}})}p^{\frac{1-\beta}{\alpha}}}{(p-\lambda)^{m+1}}dp,$$

откуда

$$E^{m+1}_{\alpha,\alpha m+\beta}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i\alpha}\int\limits_{\gamma(r,\theta)} \frac{\exp{(p^{\frac{1}{\alpha}})}p^{\frac{1-\beta}{\alpha}}}{(p-\lambda)^{m+1}}dp. \tag{4}$$

Таким образом, обобщенная функция Миттаг-Леффлера в области G^- представима в виде интеграла (4).

Найдем теперь интегральное представление обобщенной функции Миттаг-Леффлера в области G^+. Используя представление (3) функции Миттаг-Леффлера, соотношение (1), а также разложение

$$\exp{(\lambda^{\frac{1}{\alpha}})} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^{\frac{1}{\alpha}j}}{j!},$$

имеем:

$$E^{m+1}_{\alpha,\alpha m+\beta}(\lambda) = \frac{1}{\alpha m!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{\alpha}(j-\beta+1)-m+1\right)_m}{j!}\lambda^{\frac{1}{\alpha}(j-\beta+1)-m} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i\alpha}\int\limits_{\gamma(r,\omega\pi)} \frac{\exp{(p^{\frac{1}{\alpha}})}p^{\frac{1-\beta}{\alpha}}}{(p-\lambda)^{m+1}}dp. \tag{5}$$

Первое слагаемое в правой части (5) можно переписать в виде:

$$\frac{1}{\alpha m!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{\alpha}(j-\beta+1)-m+1\right)_m}{j!}\lambda^{\frac{1}{\alpha}(j-\beta+1)-m} =$$

$$= \frac{\lambda^{\frac{1}{\alpha}(1-\beta)-m}}{\alpha m!}\,{}_1\Psi_1\left[\left.\begin{matrix}(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}(1-\beta)+1)_{1,1}\\(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}(1-\beta)-m+1)_{1,1}\end{matrix}\right|\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right]$$

где ${}_p\Psi_q\left[\left.\begin{matrix}(a_l,\alpha_l)_{1,p}\\(b_l,\beta_l)_{1,q}\end{matrix}\right|\lambda^z\right]$– обобщенная функция Райта [4].

Асимпотическая формула обобщенной функции Райта для больших значений $|\lambda|$ получена в работе [**?**]:

$${}_1\Psi_1\left[\left.\begin{matrix}(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}(1-\beta)+1)_{1,1}\\(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}(1-\beta)-m+1)_{1,1}\end{matrix}\right|\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right] = |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}m}e^{i\zeta m}e^{\lambda^{1/\alpha}e^{i\zeta}}\left[\sum_{k=0}^{M-1}A_k|\lambda|^{\frac{1}{\alpha}k}e^{i\zeta k} + O\left(\frac{1}{|\lambda|^{\frac{1}{\alpha}M}}\right)\right], \tag{6}$$

где

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha}j-\frac{1}{\alpha}j(1-\beta)+1)}{\Gamma(\frac{1}{\alpha}j-\frac{1}{\alpha}j(1-\beta)-m+1)j!} = \sum_{k=0}^{M}\frac{1/\alpha A_k}{\Gamma(\frac{1}{\alpha}j+b_k)} + O\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{\alpha}j+b_{M+1})}\right).$$

В частности, $A_0 = (\frac{1}{\alpha})^m$.

Из асимптотической формулы (6) видно, что при $|\lambda| \to \infty$ обобщенная функция Райта стремится к бесконечности как экспонента.

Получили, что в области G^+ обобщенная функция Миттаг-Леффлера представима в интегральной форме (5).

2. Асимптотические формулы для обобщенной функции Миттаг-Леффлера.

Теорема. *Пусть $\alpha < 2$, β– произвольное комплексное число, а также выполняется неравенство*

$$\frac{\pi\alpha}{2} < \omega\pi < min\{\pi, \pi\alpha\}.$$

Тогда для любого целого $N > 1$ при $|\lambda| \to \infty$ справедливы следующие асимптотические формулы:

1. При $\omega\pi \leq |\arg\lambda| \leq \pi$

$$E^{m+1}_{\alpha,\alpha m+\beta}(\lambda) = \sum_{s=m+1}^{N} \frac{(-1)^{m+1}(s-m)_m}{m!\lambda^s\Gamma(\beta-(s-m)\alpha)} + O\left(\frac{1}{|\lambda|^{N+1}}\right); \tag{7}$$

2. при $|\arg\lambda| \leq \omega\pi$

$$E^{m+1}_{\alpha,\alpha m+\beta}(\lambda) = \frac{1}{\alpha m!}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{\alpha}(j-\beta+1)-m+1\right)_m}{j!}\lambda^{\frac{1}{\alpha}(j-\beta+1)-m}+$$

$$+\sum_{s=m+1}^{N} \frac{(-1)^{m+1}(s-m)_m}{m!\lambda^s\Gamma(\beta-(s-m)\alpha)} + O\left(\frac{1}{|\lambda|^{N+1}}\right). \tag{8}$$

Доказательство. *1.* Выберем число θ так, чтобы

$$\frac{\pi\alpha}{2} < \theta < \omega\pi < min\{\pi, \pi\alpha\}. \tag{9}$$

В формулу интегрального представлениям (4) для области G^- (полагая $r = 1$) подставим разложение

$$\frac{1}{(p-\lambda)^{m+1}} = \frac{1}{m!}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^m\left[\frac{1}{p-\lambda}\right] = \frac{1}{m!}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^m\left[-\sum_{k=1}^{n}\frac{p^{k-1}}{\lambda^k} + \frac{p^n}{\lambda^n(p-\lambda)}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{m+1}p^{k-1}(k)_m}{m!\lambda^{k+m}} + \sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k(n)_k p^n}{k!\lambda^{n+k}(p-\lambda)^{m-k+1}}. \tag{10}$$

Учитывая интегральную формулу Ханкеля [6]

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(1,\theta)} e^p p^{-z}dp, \qquad (Rez > 0) \tag{11}$$

получим:

$$E^{m+1}_{\alpha,\alpha m+\beta}(\lambda) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{m+1}(k)_m}{m!\lambda^{k+m}\Gamma(\beta-\alpha k)}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i\alpha}\int\limits_{\gamma(1,\theta)}\exp(p^{1/\alpha})p^{\frac{1-\beta}{\alpha}+n}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k(n)_k}{k!\lambda^{n+k}(p-\lambda)^{m-k+1}}dp$$

или (после замены переменной суммирования)

$$E^{m+1}_{\alpha,\alpha m+\beta}(\lambda)=\sum_{s=m+1}^{N}\frac{(-1)^{m+1}(s-m)_m}{m!\lambda^s\Gamma(\beta-(s-m)\alpha)}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i\alpha}\int\limits_{\gamma(1,\theta)}exp(p^{1/\alpha})p^{\frac{1-\beta}{\alpha}+n}\sum_{s=m}^{2m}\frac{(-1)^{s-m}(n)_{s-m}}{(s-m)!\lambda^{n+s-m}(p-\lambda)^{2m-s+1}}dp. \qquad (12)$$

При достаточно большом значении $|\lambda|$, согласно (9), имеем

$$\min_{\gamma(1,\theta)}|p-\lambda|=|\lambda|\sin(\omega\pi-\theta).$$

Тогда из представления (12) следует оценка

$$\left|E^{m+1}_{\alpha,\alpha m+\beta}(\lambda)-\sum_{s=m+1}^{N}\frac{(-1)^{m+1}(s-m)_m}{m!\lambda^s\Gamma(\beta-(s-m)\alpha)}\right|\leq$$

$$\leq\frac{|\lambda|^{-N-1}}{2\pi\alpha\sin(\omega\pi-\theta)}\sum_{s=m}^{2m}\frac{(n)_{s-m}}{(s-m)!}\int\limits_{\gamma(1,\theta)}|exp(p^{1/\alpha})||p^{\frac{1-\beta}{\alpha}+n}||dp|,$$

откуда получаем асимптотическую формулу (7).

2. Далее, в области G^+ выберем угол θ так, чтобы

$$\frac{\pi\alpha}{2}<\omega\pi<\theta<min\{\pi,\pi\alpha\}.$$

В найденое интегральное представление (5) подставим разложение (10). Получим (с учетом интегральной формулы Ханкеля (11)):

$$E^{m+1}_{\alpha,\alpha m+\beta}(\lambda)=\frac{1}{\alpha m!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{\alpha}(j-\beta+1)-m+1\right)_m}{j!}\lambda^{\frac{1}{\alpha}(j-\beta+1)-m}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{m+1}(k)_m}{m!\lambda^{k+m}\Gamma(\beta-\alpha k)}+\frac{1}{2\pi i\alpha}\int\limits_{\gamma(1,\theta)}exp(p^{1/\alpha})p^{\frac{1-\beta}{\alpha}+n}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k(n)_k}{k!\lambda^{n+k}(p-\lambda)^{m-k+1}}dp$$

или (после замены переменной суммирования)

$$E^{m+1}_{\alpha,\alpha m+\beta}(\lambda)=\frac{1}{\alpha m!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{\alpha}(j-\beta+1)-m+1\right)_m}{j!}\lambda^{\frac{1}{\alpha}(j-\beta+1)-m}+$$

$$+\sum_{s=m+1}^{N}\frac{(-1)^{m+1}(s-m)_m}{m!\lambda^s\Gamma(\beta-(s-m)\alpha)}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i\alpha}\int\limits_{\gamma(1,\theta)} exp(p^{1/\alpha})p^{\frac{1-\beta}{\alpha}+n}\sum_{s=m}^{2m}\frac{(-1)^{s-m}(n)_{s-m}}{(s-m)!\lambda^{n+s-m}(p-\lambda)^{2m-s+1}}dp. \qquad (13)$$

При $|\lambda|\to\infty$

$$\min_{\gamma(1,\theta)}|p-\lambda| = |\lambda|\sin(\theta-\omega\pi).$$

Оценим последний интеграл в правой части формулы (13):

$$I \le \frac{|\lambda|^{-N-1}}{2\pi\alpha\sin(\theta-\omega\pi)}\int\limits_{\gamma(1,\theta)} |exp(p^{1/\alpha})||p^{\frac{1-\beta}{\alpha}+n}|\sum_{s=m}^{2m}\frac{(n)_{s-m}}{(s-m)!}|dp|,$$

откуда следует асимптотическая формула (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Prabhakar T.R.* A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel // Yokohama Math. J., 19. (1971) 7-15.
2. *Shukla A. K., Prajapati J. C.* On a generalization of Mittag-Leffler function and its properties // J. Math. Anal. Appl. 2007. Vol. 336. Pp. 797-811.
3. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука. 1966. 672 с.
4. *Kilbas A.A., Saigo M., Trujillo J.J.* On a generalized Wright function // J. Fractional Calculus and Applied Analysis. 2002. Vol. 5, № 4. P. 437-460.
5. *Mathai A.M., Saxena R.K., Haubold H.J.* The H – Function. Springer. 2010. 270 с.
6. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука. 2005. 199 с.

ABSTRACT

In the paper, we find integral representations and asymptotic expansions for the generalized Mittag-Leffler function.

Key words.

Generalized Mittag-Leffler function, integral representation, asymptotic formula.

Institute of Applied Mathematics and Automation, Nalchik; ipma@niipma.ru

АННОТАЦИЯ

Найдены интегральные представления для обобщенной функции Миттаг-Леффлера. Для полученных представлений выписаны асимптотические формулы.

Ключевые слова. Обобщенная функция Миттаг-Леффлера, интегральное представление, асимптотическая формула.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение "Институт прикладной математики и автоматизации", г. Нальчик; ipma@niipma.ru