МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.91 Научная статья
DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-4-11-17

Обобщенная задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом с производной Джрбашяна – Нерсесяна

М. Г. Мажгихова
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН
г. Нальчик, Россия
madina.mazhgihova@yandex.ru

Аннотация. В последние десятилетия заметно возрос интерес к исследованию дифференциальных уравнений, включающих производные дробного порядка. Интерес этот вызван тем, что количество областей науки, в которых используются уравнения, содержащие дробные производные, варьируется от биологии и медицины до теории управления, инженерии, финансов, а также оптики, физики и так далее. В данной работе для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами с запаздывающим аргументом с оператором дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна исследуется обобщенная краевая задача Дирихле. Для исследуемой задачи получено условие однозначной разрешимости. Сформулирована и доказана теорема существования и единственности решения задачи. Решение задачи выписано в терминах специальной функции $W_\nu(t)$, которая, в свою очередь, определяется через обобщенную функцию Миттаг – Леффлера (или функция Прабхакара).

Ключевые слова: дифференциальное уравнение дробного порядка, дробная производная, производная Джрбашяна – Нерсесяна, дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом, задача Дирихле, обобщенные краевые условия, обобщенная функция Миттаг – Леффлера

Благодарности: автор выражает благодарность рецензентам за указанные замечания, которые позволили повысить качество статьи.

Для цитирования. *Мажгихова М. Г.* Обобщенная задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом с производной Джрбашяна – Нерсесяна // Доклады АМАН. 2022. Т. 22, № 4. С. 11–17.
DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-4-11-17

34A08, 34B05 Original article

Generalized Dirichlet problem for an ordinary delay differential equation with Dzhrbashyan – Nersesyan derivative

Madina G. Mazhgikhova
Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik, Russia
madina.mazhgihova@yandex.ru

Abstract. In recent decades, interest in the study of differential equations involving fractional derivatives has noticeably increased. This interest is due to the fact that the number of fields of science in which equations containing fractional derivatives are used varies from biology and medicine to management theory, engineering, finance, as well as optics, physics and so on. In this paper, the generalized Dirichlet problem is investigated for a linear ordinary delay differential equation with Dzhrbashyan – Nersesyan fractional differentiation operator. A condition for unique solvability is obtained. The existence and uniqueness theorem to the solution is proved. The solution of the problem is written out in terms of the special function $W_\nu(t)$, which is defined in terms of the generalized Mittag – Leffler function (Prabhakar function).

Keywords: fractional differential equation, fractional derivative, Dzhrbashyan–Nersesyan derivative, delay differential equation, Dirichlet problem, generalized boundary conditions, generalized Mittag – Leffler function

Acknowledgments: the author are thankful to the anonymous reviewer for his valuable remakes.

For citation. *M. G. Mazhgikhova* Generalized Dirichlet problem for an ordinary delay differential equation with Dzhrbashyan – Nersesyan derivative. Adyghe Int. Sci. J. 2022. Vol. 22, No. 4. P. 11–17. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-4-11-17

Введение

В работе рассматривается уравнение

$$D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_m\}}u(t) - \lambda u(t) - \mu H(t-\tau)u(t-\tau) = f(t), \quad 0 < t < 1 \tag{1}$$

с дробной производной Джрбашяна – Нерсесяна $D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_m\}}$ [1], λ, μ – произвольные постоянные, τ – фиксированное положительное число, $H(t)$ – функция Хевисайда.

Оператор дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна определяется соотношением

$$D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_m\}}u(t) = D_{0t}^{\gamma_m-1}D_{0t}^{\gamma_{m-1}}\dots D_{0t}^{\gamma_0}u(t), \tag{2}$$

где $\alpha = \sum\limits_{k=0}^{m}\gamma_k - 1, 0 < \gamma_k \leq 1, \gamma_0 + \gamma_m > 1$, $D_{0t}^{\gamma_i}$ – операторы дробного инегро-дифференцирования Римана – Лиувилля [2].

В случае $\gamma_0 = \alpha - m + 1, \gamma_k = 1 (k = \overline{1, m})$ оператор Джрбашяна – Нерсесяна переходит в дробный оператор Римана – Лиувилля [2, с. 9]

$$D_{0t}^{\{\alpha-m+1,1,\ldots,1\}}u(t) = D_{0t}^{\alpha}u(t), \quad m-1 < \alpha \leq m,$$

а при $\gamma_m = \alpha - m + 1, \gamma_k = 1 (k = \overline{0, m-1})$ оператор Джрбашяна – Нерсесяна переходит в производную Герасимова – Капуто (регуляризованная дробная производная) [2, с. 11]:

$$D_{0t}^{\{1,\ldots,1,\alpha-m+1\}}u(t) = \partial_{0t}^{\alpha}u(t), \quad m-1 < \alpha \leq m,$$

где дробная производная Герасимова – Капуто определяется равенством

$$\partial_{0t}^{\alpha}u(t) = D_{0t}^{\alpha-m}u^{(m)}(t), \quad m-1 < \alpha \leq m, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

В последние десятилетия заметно возрос интерес к исследованию дифференциальных уравнений, включающих производные дробного порядка. Интерес этот вызван тем, что количество областей науки, в которых используются уравнения, содержащие дробные производные, варьируется от биологии и медицины до теории управления, инженерии, финансов, а также оптики, физики и так далее.

Впервые решение дифференциального уравнения с дробным оператором было получено в явном виде в работе [3]. Уравнение с композицией дробных операторов было рассмотрено в работе [1], в которой доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Последние годы количество работ, посвященных исследованию начальных и краевых задач для уравнений с различными дробными операторами, в том числе с оператором дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна, растет. Отметим некоторые работы, более близкие к теме исследования данной работы.

Однозначная разрешимость начальных задач для линейных уравнений в банаховых пространствах с композицией двух дробных производных исследована в работе [4], [5]. Исследованию начальной задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с матричным коэффициентом с оператором дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна посвящена работа [6].

Краевая задача для уравнения с постоянными коэффициентами с дробной производной Джрбашяна – Нерсесяна впервые была исследована в работе [7]. Задача Дирихле для уравнения с постоянными коэффициентами с дробной производной Джрбашяна – Нерсесяна исследовалась в работе [8].

В данной работе исследуется уравнение с производной Джрбашяна – Нерсесяна, обобщенное включением в него слагаемого с запаздыванием.

Ранее, решение задачи Дирихле для уравнения с производной Римана – Лиувилля и уравнения с производной Герасимова – Капуто при $1 < \alpha \leq 2$, которые являются частными случаями уравнения (1), были получены в работах [9] и [10]. Здесь, для уравнения с оператором дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна произвольного порядка и с запаздывающим аргументом (1) исследуется обобщенная задача Дирихле.

Постановка задачи. Теорема существования и единственности

Регулярным решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(t)$ такую, что $D_{0t}^{\{\gamma_0,\ldots,\gamma_k\}}u(t) \in AC[0,1]$, $k = \overline{0, m-1}$, и удовлетворяющую уравнению (1) для всех $0 < t < 1$.

В настоящей работе для уравнения (1) исследуется следующая задача:

Задача. Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0} D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_{i-1}\}} u(t) = a_i, \quad i=\overline{1,p}, \\ \lim\limits_{t\to 1} D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_{j-1}\}} u(t) = b_j, \quad j=\overline{1,q}, \end{cases} \tag{4}$$

причем $p, q \geq 1$ такие, что $p+q=m$.

Для таких λ и μ, для которых

$$\triangle = \begin{vmatrix} W_{\rho_p-\rho_0+1}(1) & W_{\rho_{p+1}-\rho_0+1}(1) & \dots W_{\rho_{m-1}-\rho_0+1}(1) \\ W_{\rho_p-\rho_1+1}(1) & W_{\rho_{p+1}-\rho_1+1}(1) & \dots W_{\rho_{m-1}-\rho_1+1}(1) \\ \dots & \dots & \dots \\ W_{\rho_p-\rho_{q-1}+1}(1) & W_{\rho_{p+1}-\rho_{q-1}+1}(1) & \dots W_{\rho_{m-1}-\rho_{q-1}+1}(1) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{5}$$

введем функцию

$$G(t,\xi) = H(t-\xi)W_\alpha(t-\xi) + \frac{1}{\triangle}\sum_{j=1}^{q} W_{\alpha-\rho_{j-1}+1}(1-\xi)\sum_{s=1}^{q} W_{\rho_{s+p-1}}(t)M_{js}d\xi, \tag{6}$$

где через M_{ij} обозначено алгебраическое дополнение к элементу определителя (5), $\rho_k = \gamma_0 + \dots + \gamma_k$, функция $W_\nu(t)$ определяется рядом

$$W_\nu(t) = W_\nu(t;\tau,\lambda,\mu) \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s (t-s\tau)_+^{\alpha s+\nu-1} E_{\alpha,\alpha s+\nu}^{s+1}(\lambda(t-s\tau)_+^{\alpha}), \quad \nu \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

где

$$(t-s\tau)^\rho = \begin{cases} (t-s\tau)^\rho, & t > s\tau, \\ 0, & t \leq s\tau, \end{cases}$$

$$E_{\alpha,\beta}^{\rho}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!} \tag{8}$$

– обобщенная функция Миттаг – Леффлера [11], $(\rho)_k = \Gamma(\rho+k)/\Gamma(\rho)$ – символ Похгаммера.

Для $W_\nu(t)$ справедливы свойства [9]:

1. Начиная с некоторого s выражение $s\tau > t$, поэтому ряд (7) содержит конечное число слагаемых $N = [t/\tau] + 1$.

2. Для функции (7) имеет место формула дробного интегродифференцирования порядка $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\nu > 0$:

$$D_{0t}^{\alpha} W_\nu(t) = W_{\nu-\alpha}(t). \tag{9}$$

3. Функция $W_\nu(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$W_\nu(t) = \lambda W_{\nu+\alpha}(t) + \mu W_{\nu+\alpha}(t-\tau) + \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}, \qquad \nu \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

4. Для функции $W_k(t)$ справедливо соотношение

$$W_k^{(i)}(0) = \begin{cases} 0, k \neq i+1, \\ 1, k = i+1. \end{cases} \tag{11}$$

Справедлива теорема:

Теорема. Пусть для функции $f(t) \in C(0,1)$ справедливо представление вида

$$f(t) = D_{0t}^{\gamma_m - 1} g(t), \quad g(t) \in L(0,1),$$

и выполнено условие (5). Тогда решение задачи (1), (4) существует, единственно и имеет вид

$$u(t) = \sum_{k=1}^{p} a_k D_{1\xi}^{\{\gamma_m, \dots, \gamma_k\}} G(t,\xi)\Big|_{\xi=0} - \sum_{k=1}^{q} b_k D_{1\xi}^{\{\gamma_m, \dots, \gamma_k\}} G(t,\xi)\Big|_{\xi=1} + \int_0^1 f(\xi) G(t,\xi) d\xi. \quad (12)$$

Доказательство.

Докажем, что функция (12) удовлетворяет уравнению (1). Используя представление функции Грина (6) представим решение (12) в виде $u(t) = u_1 + u_2 + u_3$, где

$$u_1 = \sum_{k=1}^{p} a_k \left[W_{\rho_{k-1}}(t) - \frac{1}{\triangle} \sum_{s=1}^{q} W_{\rho_{s+p-1}}(t) \sum_{j=1}^{q} W_{\rho_{k-1}-\rho_{j-1}}(1) M_{js} \right] + \frac{1}{\triangle} \sum_{s=1}^{q} W_{\rho_{s+p-1}}(t) \sum_{j=1}^{q} M_{js} b_j,$$

$$u_2 = \frac{1}{\triangle} \sum_{s=1}^{q} W_{\rho_{s+p-1}}(t) \int_0^1 f(\xi) \sum_{j=1}^{q} M_{js} W_{\alpha-\rho_{j-1}+1}(1-\xi) d\xi, \quad u_3 = \int_0^t f(\xi) W_\alpha(t-\xi) d\xi.$$

Тогда, учитывая представление функции $W_\nu(t)$ (7), а также ее свойства (9) и (10) получаем, что

$$D_{0t}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}} [u_1(t) + u_2(t)] = \lambda [u_1(t) + u_2(t)] + \mu [u_1(t) + u_2(t)],$$

и

$$D_{0t}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}} u_3(t) = D_{0t}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}} \int_0^t f(\xi) W_\alpha(t-\xi) d\xi.$$

Используя представление функции $f(t) = D_{0t}^{\gamma_m - 1} g(t)$, получаем:

$$= D_{0t}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}} \int_0^t D_{0t}^{\gamma_m - 1} g(\xi) W_\alpha(t-\xi) d\xi = D_{0t}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}} \int_0^t g(\xi) W_{\alpha-\gamma_m+1}(t-\xi) d\xi =$$

$$= D_{0t}^{\gamma_m - 1} \int_0^t g(\xi) W_{\alpha-\gamma_m-\rho_{m-1}+1}(t-\xi) d\xi = D_{0t}^{\gamma_m - 1} \int_0^t g(\xi) W_0(t-\xi) d\xi =$$

$$= D_{0t}^{1} D_{0t}^{\gamma_m - 1} D_{0t}^{-1} \int_0^t g(\xi) W_0(t-\xi) d\xi = D_{0t}^{1} D_{0t}^{\gamma_m - 1} \int_0^t g(\xi) W_1(t-\xi) d\xi =$$

$$= D_{0t}^{1} \int_0^t D_{0t}^{\gamma_m - 1} g(\xi) W_1(t-\xi) d\xi = D_{0t}^{1} \int_0^t f(\xi) W_1(t-\xi) d\xi =$$

$$= f(t) + \int\limits_0^t f(\xi)W_0(t-\xi)d\xi = f(t) + \int\limits_0^t f(\xi)[\lambda W_\alpha(t-\xi) + \mu W_\alpha(t-\xi-\tau)]d\xi =$$

$$= f(t) + \lambda u_3(t) + \mu u_3(t).$$

Покажем теперь справедливость условий (4). Используя свойства функции $W_\nu(t)$ (9) и (11), имеем:

$$D_{0t}^{\{\gamma_0,\ldots,\gamma_{i-1}\}}u(t)\Big|_{t=0} = \sum_{k=0}^{p-1} a_{k+1}\left[W_{\rho_k-\rho_{i-1}+1}(0) - \frac{1}{\triangle}\sum_{s=1}^{q} W_{\rho_{s+p-1}-\rho_{i-1}+1}(0)\sum_{j=1}^{q} M_{js}W_{\rho_k-\rho_{j-1}+1}(1)\right].$$

Из свойства (11) имеем, что $W_{\rho_k-\rho_{i-1}+1}(0) = 1$ при $k = i-1$ и $W_{\rho_k-\rho_{i-1}+1}(0) = 0$ при $k \neq i-1$, откуда следует, что $D_{0t}^{\{\gamma_0,\ldots,\gamma_i\}}u(t)\Big|_{t=0} = a_i$,

$$D_{0t}^{\{\gamma_0,\ldots,\gamma_{j-1}\}}u(t)\Big|_{t=1} = \frac{1}{\triangle}\sum_{s=1}^{q} W_{\rho_{s+p-1}-\rho_{j-1}+1}(1)\sum_{j=1}^{q} M_{js}b_j.$$

Используя формулу разложения определителя (5) по столбцам

$$\triangle = \sum_{j=1}^{q} W_{\rho_{p+s-1}-\rho_{j-1}+1}(1)M_{js}, \quad s = 1,\ldots,q,$$

имеем, что полученное решение (12) удовлетворяет условиям (4).

Список использованных источников

1. *Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. Акад. Наук Арм. ССР. 1968. Т. 3. № 1. С. 3–29.
2. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
3. *Barrett J. H.* Differential equation of non-integer order // Canad. J. Math. 1954. Vol. 6, No. 4. P. 529–541.
4. *Волкова А. Р., Ижбердеева Е. М., Федоров В. Е.* Начальные задачи для уравнений с композицией дробных производных. Челяб. физ.-матем. журн. 2021. Т. 6, №. 3. С. 269–277.
5. *Fedorov V. E., Plekhanova M. V., Izhberdeeva E. M.* Initial Value Problems of Linear Equations with the Dzhrbashyan–Nersesyan Derivative in Banach Spaces. Symmetry. 2021. Vol. 13, No. 6. P. 1058. https://doi.org/10.3390/sym13061058
6. *Mamchuev M. O.* Cauchy problem for a linear system of ordinary differential equations of the fractional order. Mathematics. 2020. Vol. 8, No. 9. P. 1475.
7. Джрбашян М. М. Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма-Лиувилля // Изв. АН Армянской ССР. 1970. Т. 5. № 2. С. 71–96.
8. *Богатырева Ф. Т.* Задача Дирихле для уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами // Челяб. физ.-матем. журн. 2017. Т. 2, №4. С 401–411.
9. *Мажгихова М. Г.* Задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Дифференц. уравн. 2018. Т. 54, № 2. С. 187–194.
10. *Мажгихова М. Г.* Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Сиб. электрон. матем. изв. 2018. Т. 15. С. 685–695.

11. *Prabhakar T. R.* A singular integral equation with a generalized Mittag – Leffler function in the kernel // Yokohama Math. J. 1971. Vol. 19. P. 7–15.

Поступила 12.12.2022; одобрена после рецензирования 19.12.2022; принята к публикации 20.12.2022.

Об авторе:

Мажгихова Мадина Гумаровна, младший научный сотрудник Отдела дробного исчисления Института прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, (360017, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова 89 А), https://orcid.org/0000-0001-7612-8850, madina.mazhgihova@yandex.ru

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

References

1. *M. M. Dzhrbashyan, A. B. Nersesyan* Drobnye proizvodnye i zadacha Koshi dlya differentsial'nykh uravneniy drobnogo poryadka [Fractional derivatives and Cauchy problem for differential equations of fractional order] // Izv. Akad. Nauk Arm. SSR. 1968. Vol.. 3. № 1. P. 3–29.
2. *A. M. Nakhushev* Drobnoe ischislenie i ego primenenie [Fractional calculus and its application]. M.: Fizmatlit, 2003. 272 p.
3. *J. H. Barrett* Differential equation of non-integer order // Canad. J. Math. 1954. Vol. 6, № 4. P. 529–541.
4. *A. R. Volkova, E. M. Izhberdeeva, V. E. Fedorov* Initial value problems for equations with a composition of fractional derivatives. Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2021. Vol. 6, iss. 3. P. 269–277.
5. *V. E. Fedorov, M. V. Plekhanova, E. M. Izhberdeeva* Initial Value Problems of Linear Equations with the Dzhrbashyan–Nersesyan Derivative in Banach Spaces. Symmetry. 2021. Vol. 13, No. 6. P. 1058. https://doi.org/10.3390/sym13061058.
6. *M. O. Mamchuev* Cauchy problem for a linear system of ordinary differential equations of the fractional order. Mathematics. 2020. Vol. 8, No. 9. P. 1475.
7. M. M. Dzhrbashyan Kraevaya zadacha dlya differentsial'nogo operatora drobnogo poryadka tipa Shturma-Liuvillya [Boundary value problem for a Sturm-Liouville type differential operator of fractional order] // Izv. Akad. Nauk Arm. SSR. 1970. Vol. 5. No. 2. P. 71–96.
8. *F. T. Bogatyreva* Dirichlet problem for fractional differential equation with constant coefficients // Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2017. Vol. 2, iss. 4. P. 401–411.
9. *M. G. Mazhgikhova* Dirichlet problem for a fractional-order ordinary differential equation with retarded argument // Differential Equations. 2018. Vol. 54. iss. 2. P. 185–192.
10. *M. G. Mazhgikhova* Boundary value problems for a linear ordinary differential equation of fractional order with delay // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2018. Vol. 15. P. 685–695.
11. *T. R. Prabhakar* A singular integral equation with a generalized Mittag – Leffler function in the kernel // Yokohama Math. J. 1971. Vol. 19. P. 7–15.

Submitted 12.12.2022; approved after reviewing 19.12.2022; accepted for publication 20.12.2022.

About the author:

Mazhgikhova Madina Gumarovna, Junior Researcher of Department of Fractional Calculus, Institute of Applied Mathematics and Automation of KBSC RAS, (360017, 89 A Shortanova St., Nalchik, Russia), https://orcid.org/0000-0001-7612-8850, madina.mazhgihova@yandex.ru

The author has read and approved the final version of the manuscript.