УДК 517.5 Научная статья
DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-4-18-28

Оценки φ – сильных средних последовательностей сингулярных интегралов методов суммирования

Н. Л. Пачулиа, Н. Н. Пачулия
Абхазский государственный университет, г. Сухум, Абхазия
niaz-pachulia@rambler.ru

Аннотация. В работе найдены достаточные условия, которым должно удовлетворять ядро, чтобы сингулярный интеграл φ– сильно суммировался регулярными методами.

Ключевые слова: сингулярный интеграл, суммирование, сильное суммирование, методы суммирования

Благодарности: авторы выражают благодарность рецензентам за указанные замечания, которые позволили повысить качество статьи.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования. *Пачулиа Н. Л., Пачулия Н. Н.* Оценки φ – сильных средних последовательностей сингулярных интегралов методов суммирования // Доклады АМАН. 2022. Т. 22, № 4. С. 18–28. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-4-18-28

MSC 32A10; 32A37 Original article

Estimates of φ – strong mean sequences of singular integrals of summation methods

Niazbey L. Pachulia, Natalia N. Pachuliya
Abkhazian State University, Sukhum, Republic of Abkhazia
niaz-pachulia@rambler.ru

Abstract. Sufficient conditions are found in the work that the kernel satisfies for the singular integral φ - to be strongly summable by regular methods.

Keywords: singular integral, summation, strong summation, summation methods

Acknowledgments: the authors are thankful to the anonymous reviewer for his valuable remakes.

The authors declare no conflict of interest.

For citation. *N. L. Pachulia, N. N. Pachuliya* Estimates of φ – strong mean sequences of singular integrals of summation methods. Adyghe Int. Sci. J. 2022. Vol. 22, No. 4. P. 18–28.
DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-4-18-28

Сильными средними положительного метода суммирования рядов $\lambda = (\lambda_{k,n})$ последовательности сингулярных интегралов

$$f_n(x) = \int_a^b f(t)\,\phi_n(t,x)\,\alpha(t)\,dt, \tag{1}$$

назовем величины

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{k,n}\varphi(|f_k(x) - f(x)|),$$

где $f \in L_{1,\alpha}[a,b]$, $\phi_n(t,x)$ – суммируемая функция на сегменте $[a,b]$, при любом фиксированном $x \in (a,b)$, $\alpha(t)$ – неотрицательный вес, а ϕ - непрерывная положительная функция на $[0,\infty)$ такая что $\varphi(0) = 0$.

Пусть $x \in (c,d) \subset (a,b)$ и функция $\phi_n(t,x)$ обладает следующими свойствами:

$$\int_a^b \phi_n(t,x)\,\alpha(t)\,dt = 1, \quad \forall n \in N_0 = \{0,1,\ldots\}, \tag{2}$$

для некоторой окрестности точки $I_n = (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \subset (c,d)$ и $I = [c,d] \setminus I_n$

$$|\phi_n(t,x)| \leq \mathrm{A}(n+1), \forall t \in I_n \tag{3}$$

$$|\phi_n(t,x)| \leq \frac{A}{|t-x|}, t \neq x, t \in [c,d], \tag{4}$$

$$\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left|\int_I f(t)\,\phi_{\mathrm{k}}(t,x)\,\alpha(t)\,dt\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}} \leq A\left\{\int_I \left|\frac{f(t)}{t-x}\right|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} \tag{5}$$

$p \in (1,2]$, $q = \frac{p}{p-1}$, $f \in L_{p,\alpha}[c,d]$, если $f \in L_{2,\alpha}(T)$, $T = [a,b] \setminus [c,d]$, то $I = T$ и $p = q = 2$.

Ядро сингулярного интеграла, удовлетворяющее условиям (2)–(5) будем называть ядром типа Дирихле. Здесь и в дальнейшем $A > 0$ число, не зависящее от параметра n, возможно не одно и то же в различных местах текста.

К интегралу вида (1) сводятся частные суммы порядка n ряда Фурье функции по ортонормированным системам. Сходимость или расходимость сингулярных интегралов $f_n(x)$ к числу $f(x)$ зависит от поведения функции $\phi_n(t,x)$. Функцию $\phi_n(t,x)$ называют ядром системы. Ядра многих ортонормированных систем обладают свойствами (2)–(5), т.е. являются ядрами типа Дирихле. Например, если дана ортонормированная на сегменте $[a,b]$ система алгебраических многочленов $p_n(x)$, которая равномерно ограничена в некоторой окрестности I_0 точки x. Тогда ядро системы

$$\phi_n(t,x)=\sum_{k=0}^{n}p_n(x)\ p_n(t)$$

удовлетворяет условию (3) на основании равенства Кристоффеля-Дарбу [1],

$$\phi_n(t,x)=\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\frac{p_{n+1}(t)\,p_n(x)-p_n(t)\,p_{n+1}(x)}{t-x}, \tag{6}$$

где α_n−старший коэффициент многочлена $p_n(t)$.

Тогда $\phi_n(t,x)$ ввиду $\left|\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right|\leq M$ удовлетворяет условию (4).

Если вес ортогональности α системы ограничен на $[c,d]$ и на этом множестве функция f суммируема со степени $p\in(1,2]$, на I= $[a,b]\setminus[c,d]$ суммируема с квадратом, то учитывая соотношение (4) и, полагая при этом,

$$F(t)=\begin{cases}\frac{f(t)}{t-x},\ \ t\in[c,d],\\ 0,t\in[a,b]\setminus[c,d],\end{cases}$$

получим

$$\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left|\int_I f(t)\,\phi_n(t,x)\ \alpha(t)\,dt\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\leq A\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left|\int_a^b F(t)\,p_n(t)\ \alpha(t)\,dt\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}},$$

и на основании неравенства Рисса [2] правая часть предыдущего неравенства не превосходит величину

$$A\left\{\int_a^b|F(t)|^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}}=A\left\{\int_I|F(t)|^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Отсюда следует, что ядро этой системы имеет тип Дирихле.

На некотором интервале $I_0\subset(c,d)$ вес α ограничен, например, для многочленов Якоби $\alpha(t)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, $\alpha>-1,\beta>-1$. К таким системам относятся многочлены Чебышева первого рода $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$, второго рода $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, многочлены Лежандра $\alpha=\beta=0$, а также тригонометрическая система функции и др.

Целью работы является изучение свойств сильных средних уклонений функции сингулярными интегралами (1) общих методов суммирования в ее точках Лебега.

Пусть (n_j) некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел [3]

$$1+\mu^{-1}\leq\frac{n_{j+1}}{n_j}\leq\mu,\mu>1. \tag{7}$$

Множество таких последовательностей обозначим $\Delta(\mu)$

Пусть $(n_j)\in\Delta(\mu)$. Тогда, так как

$$\frac{1}{\mu}\leq\frac{n_{j+1}-n_j}{n_j}\leq\mu-1 \tag{8}$$

найдутся положительные числа A_1, A_2 такие, что

$$A_1 ln\frac{n_{j+1}-n_j}{r}e \leq ln\frac{n_j e}{r} \leq A_2 ln\frac{n_{j+1}-n_j}{r}e, \tag{9}$$

где $\forall j \in N = \{1, 2, \ldots\}$.

Пусть $B \subset [n_j, n_{j+1}-1] \cap N, r{=}|B|$ −мощность множества B и

$$h^{(q)}_{n_j,B}(f,x) = \left\{\frac{1}{r}\sum_{k\in B}|f_k(x) - f(x)|^q\right\}^{\frac{1}{q}} \tag{10}$$

являются степенными, сильными средними, с пропусками уклонений $f_k(x) - f(x)$.

Очевидно, что если B состоит из одного элемента k$\in [n_j, n_{j+1}]$, то

$$h^{(q)}_{n_j,B}(f,x) = f_k(x) - f(x)\,|.$$

Если же B$= [n_j, n_{j+1}-1] \cap N$ и $\beta_{n_j} = n_{j+1} - n_j$,

$$h^{(q)}_{n_j,B}(f,x) = \left\{\frac{1}{\beta_{n_j}}\sum_{k\in B}|\mathrm{f_k}(\mathrm{x}) - \mathrm{f}(\mathrm{x})|^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

получаем среднее уклонений $f_k(x) - f(x)$, типа Валле-Пуссена.

Пусть функция $f \in L_{p,\alpha}[I_n]$, $I_n \subset (c,d)$, $p \geq 1$. Точку $x \in I_n$ называют p-точкой Лебега функции f, если

$$\lim_{|I|\to 0}\frac{1}{|I|}\int\limits_I |f(t) - f(x)|^p \alpha(t)\,dt = 0, \tag{11}$$

где $|I|$ −длина интервала с центром в точке x.

Теорема 1. *Пусть функция $f \in L_{p,\alpha}[\mathrm{I}] \cap L_{2,\alpha}[T]$, $[c,d] = I$, $p{>}\,1$, $T{=}\ [a,b]\setminus I$, $B \subset [n_j, n_{j+1}-1] \cap N, r = |B|$ −мощность множества B, функция $\phi_n(t,x)$− ядро типа Дирихле. Если $x \in (c,d)$ является p- точкой Лебега функции f, последовательность $(n_j) \in \Delta(\mu)$, то равномерно относительно B выполняется равенство*

$$\lim_{j\to\infty} h^{(q)}_{n_j,B}(f,x)\left(ln\frac{\beta_{n_j}e}{r}\right)^{-1} = 0. \tag{12}$$

Доказательство. Допустим, что $p \in (1,2]$. Положим q$= \frac{p}{p-1}$. На основании равенств (1)–(2) получим

$$f_k(x) - f(x) = \int\limits_a^b [f(t) - f(x)]\phi_k(t,x)\,\alpha(t)\,dt.$$

Пусть $\tau \in f\{c-a,\ b-d\} > 0$. На основании условия (7) имеем: для любого $\varepsilon > 0$, существует $\delta \in (0,\tau]$, когда $|I| \leq \delta$, выполняется неравенство

$$\left\{\frac{1}{|I|}\int\limits_I |f(t) - f(x)|^p \alpha(t)\,dt\right\}^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \tag{13}$$

Пусть

$$\gamma_1 = \left\{ t : |t-x| \le \frac{1}{\beta_{n_j}} \right\}, \gamma_2 = \left\{ t : \frac{1}{\beta_{n_j}} \le |t-x| \le \frac{1}{r} \right\},$$

$$\gamma_3 = \left\{ t : \frac{1}{r} \le |t-x| \le \delta \right\}, \gamma_4 = \left\{ t : [c, \mathrm{x}-\delta] \cup [\mathrm{x}+\delta, d] \right\},$$

$$\gamma_5 = \left\{ t : [a,c] \cup [d,b] \right\}.$$

Тогда

$$[a,b] = \bigcup_{j=1}^{5} \gamma_j.$$

Используя неравенство Минковского, получаем

$$h^{(q)}_{n_j,B}(f,x) \le \sum_{j=1}^{5} \left\{ \frac{1}{r} \sum_{k\in B} \left| \int\limits_{\gamma_j} [f(t)-f(x)] \phi_k(t,x)\, \alpha(t)\, dt \right|^q \right\}^{\frac{1}{q}} = \sum_{j=1}^{5} \Delta^{(q)}_j (f,x).$$

В силу неравенств (3) и (8) получим

$$\Delta^{(q)}_1 (f,x) \le \left\{ \frac{1}{r} \sum_{k\in B} \left| \int\limits_{\gamma_j} |f(t)-f(x)] \phi_k(t,x) \,|\alpha(t)\, dt \right|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le A n_j \int\limits_{\gamma_1} |f(t)-f(x)|\, \alpha(t)\, dt < A\varepsilon.$$

Применяя сначала неравенство (4), а затем, произведя замену переменной имеем

$$\{\Delta^{(q)}_2 (f,x) \le \left\{ \frac{1}{r} \sum_{k\in B} \left| \int\limits_{\gamma_2} |[f(t)-f(x)] \phi_k(t,x) \,|\alpha(t)\, dt \right|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le A \left\{ \frac{1}{r} \sum_{k\in B} \left| \int\limits_{\gamma_2} |[f(t)-f(x)] \frac{1}{t-x}(t,x) \,|\alpha(t)\, dt \right|^q \right\}^{\frac{1}{q}} =$$

$$= A \left| \int\limits_{\gamma_2} |[f(t)-f(x)] \frac{1}{t-x}(t,x) \,|\alpha(t)\, dt \right| < A(\mu_1+\mu_2),$$

где

$$\mu_1 = \left| \int\limits_{\frac{1}{\beta_{n_j}}}^{\frac{1}{r}} |f(x+t)-f(x)| \frac{1}{t} \alpha(x+t)\, dt \right|;$$

$$\mu_2 = \left| \int\limits_{x-\frac{1}{\beta n_j}}^{x-\frac{1}{r}} |f[(t) - f(x)] \frac{1}{t-x} |\alpha(t)\, dt \right|.$$

Интегрируя по частям, в силу (9) будем иметь

$$\mu_j \le r \int\limits_0^{\frac{1}{r}} |f(x+t) - f(x)|\, \alpha(x+t)\, dt +$$

$$+ \left\{ \int\limits_{\frac{1}{\beta n_j}}^{\frac{1}{r}} \frac{1}{t^2} \int\limits_{\frac{1}{\beta n_j}}^{t} |f(x+u) - f(x)|\, \alpha(x+u)\, du dt \right\} \le$$

$$\le A\varepsilon \left\{ 1 + \int\limits_{\frac{1}{\beta n_j}}^{\frac{1}{r}} t^{-1} dt \right\} \le A\varepsilon ln \frac{\beta_{n_j} e}{r}.$$

Аналогично $\mu_2 \le A\varepsilon ln \frac{\beta_{n_j} e}{r}$, следовательно $\Delta_2(f, x) \le A\varepsilon ln \frac{\beta_{n_j} e}{r}$.

Пусть функция F определена следующим образом

$$F_x(t) = \begin{cases} \frac{f(t)-f(x)}{t-x},\ t \in \gamma_3, \\ 0,\ t \in [a,b] \setminus \gamma_3. \end{cases}$$

Тогда используя неравенство (3) получим

$$\Delta_3^{(q)}(f, x) \le \left\{ \frac{1}{r} \sum_{k \in B} \left| \int\limits_{\gamma_3} [f(t) - f(x)] \phi_n(t, x)\ \alpha(t)\, dt \right|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le A r^{-\frac{1}{q}} \left\{ \int\limits_{\gamma_3} \left| \frac{f(t) - f(x)}{t-x} \right|^p \alpha(t)\, dt \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Так как

$$\left\{ \int\limits_{\gamma_3} \left| \frac{f(t) - f(x)}{t-x} \right|^p \alpha(t)\, dt \right\}^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \left\{ \int\limits_{x+\frac{1}{r}}^{x+\delta} \left| \frac{f(t) - f(x)}{t-x} \right|^p \alpha(t)\, dt \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int\limits_{x-\delta}^{x-\frac{1}{r}} \left| \frac{f(t) - f(x)}{t-x} \right|^p \alpha(t)\, dt \right\}^{\frac{1}{p}} = \beta_1 + \beta_2,$$

интегрируя по частям, в силу (13)

$$\beta_1 = \left\{ \int\limits_{\frac{1}{r}}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right|^p \alpha(x+t)\, dt \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= [\,\delta^{-p}\int\limits_{\frac{1}{r}}^{\delta}|f\,(x+t)-f\,(x)|^{p}\,\alpha\,(t)\,dt+\int\limits_{\frac{1}{r}}^{\delta}t^{-p-1}\int\limits_{\frac{1}{r}}^{t}|f\,(x+t)-f\ (x)|^{p}\,\alpha\,(t)\,dt]^{\frac{1}{p}}\leq$$

$$\leq\varepsilon\left\{\delta^{-p+1}+p\int\limits_{\frac{1}{r}}^{\delta}t^{-p}dt\right\}^{\frac{1}{p}}<A\varepsilon r^{\frac{1}{q}}.$$

Аналогично $\beta_2\leq A\varepsilon r^{\frac{1}{q}}$. Отсюда следует

$$\Delta_3^{(q)}\,(f,x)\leq A\varepsilon.$$

Используя неравенство (5), при $q=2$

$$\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left|\int\limits_{\gamma_5}[f\,(t)-f\,(x)]\phi_k\,(t,x)\ \alpha\,(t)\,dt\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leq A\left\{\int\limits_{\gamma_5}\left|\frac{f\,(t)-f\,(x)}{t-x}\right|^2\alpha\,(t)\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

Отсюда следует стремление к нулю общего члена ряда в левой части предыдущего соотношения. Следовательно

$$\lim_{j\to\infty}\Delta_5^{(q)}\,(f,x)=0.$$

Используя соотношение (3), $I=\gamma_4$ получаем

$$\lim_{j\to\infty}\Delta_4^{(q)}\,(f,x)=0.$$

Таким образом, при $q=\frac{p}{p-1}$ теорема 1 доказана. Если $q\in\left(0,\frac{p}{p-1}\right)$, то соотношение (8) следует из доказанной части теоремы 1, так как степенные сильные средние не убывают относительно степени. А если $q\in\left(\frac{p}{p-1},\infty\right)$ то, найдя p_1 сопряженное с q, заметим, что условия теоремы 1 выполняются для данного числа и по доказанной части, следует теорема 1. Пусть

$$\varepsilon_n^{(q)}\,(f,x)=sup_{\frac{\tau\geq n}{B}}\frac{h_{\tau,B}^{(q)}\,(f,x)}{ln\frac{\tau e}{r}},\varepsilon_n\,(f,x)=\varepsilon_n^1\,(f,x)\,.$$

Отметим, что последовательность $\varepsilon_n\,(f,x)$ в условиях теоремы 1, ограничена и убывая стремится к нулю.

Пусть непрерывная на $[0{,}\infty)$ функция φ, возрастая стремится к ∞, когда $u\to\infty$, причем $\varphi\,(0)=0$, $\varphi\,(u)>0$, $u>0$. Множество функций, обладающих указанными свойствами, обозначим через ϕ. Пусть ϕ_1 подмножество множества ϕ, элементы которого обладают дополнительными свойствами

$$\varphi\,(2u)\leq a\varphi\,(u)\,,u\in[0,\sigma]\,, \tag{14}$$

$$\ln\varphi\,(u)=0\,(u)\,,\ \mathrm{u}\to\infty. \tag{15}$$

Теорема 2. *Пусть функция* $f \in L_{p,\alpha}[I] \cap L_{2,\alpha}[T]$, $[c,d] = I$, $T = [a,b] \setminus I$, *функция* α *ограничена на* I, $p \in (1{,}2]$ *и ядро сингулярного интеграла* $\phi_n(t,x)$ *– является типа Дирихле. Если* $x \in (c,d)$ *является* p*-точкой Лебега функции* f, $\varphi \in \phi_1$, *а последовательность* $(n_j) \in \Delta(\mu)$, *то*

$$H_{n_j}(f,\varphi,x) =$$

$$= \frac{1}{\beta_{n_j}} \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \varphi(|f_k(x) - f(x)|) \le A\varphi\left(\varepsilon_{n_j}(f,x)\right). \tag{16}$$

Доказательство. Если $\varepsilon_{n_j}(f,x) = 0$, то $f_k(x) - f(x) = 0$, $\forall k \ge n_j$. Тогда неравенство (16) очевидно. Пусть $\varepsilon_{n_j}(f,x) > 0$ и $\nu \in N$,

$$\left\{k \in [n_j, n_{j+1} - 1] \cap N : (\nu - 1)\varepsilon_{n_j}(f,x) \le |\rho_k(f,x)| < \nu\varepsilon_{n_j}(f,x)\right\} =$$

$$= B_\nu, \quad \rho_{\mathrm{k}}(\mathrm{f},\mathrm{x}) = f_k(x) - f(x),$$

$$\gamma_\nu = \begin{cases} 1, \; B_\nu \ne 0, \\ 0\,, B_\nu = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Группируя слагаемые в пачки, из соотношения (17) будем иметь

$$H_n(f,\varphi,x) = \frac{1}{\beta_{n_j}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu \sum_{k \in B_\nu} \varphi(|f_k(x) - f(x)|) \le$$

$$\le \frac{1}{\beta_{n_j}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi\left(\nu\varepsilon_{n_j}(f,x)\right)|B_\nu|\,. \tag{18}$$

На основании определения величин $\varepsilon_{n_j}(f,x)$, считая $\mathrm{B} = B_\nu$, получим

$$(\nu - 1)\varepsilon_{n_j}(f,x) \le \left\{\frac{1}{r}\sum_{k \in B_\nu} |f_k(x) - f(x)|^q\right\}^{\frac{1}{q}} \le A\varepsilon_{n_j}(f,x)\, ln\frac{\beta_{n_j}}{r}e.$$

Следовательно

$$r \le \beta_{n_j} exp(1 - \beta\nu)\,. \tag{19}$$

На основании соотношений (18)–(19) имеем

$$H_{n_j}(f,\varphi,x) \le A\left(\varphi\left(\varepsilon_{n_j}(f,x)\right) + \sum_{\nu=2}^{\infty} \varphi\left(\nu\varepsilon_{n_j}(f,x)\right) exp(-\beta\nu)\right). \tag{20}$$

В работе [4] доказано утверждение, если $\varphi \in \phi_1$, то существует число $\sigma \in (0,1)$ такое что $\forall u \in [0,\sigma]$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(\nu u)\, exp(-\beta\nu) \le \mathrm{A}\varphi(u)\,. \tag{21}$$

Так как

$$\lim_{j\to\infty} \varepsilon_{n_j}(f,x) = 0,$$

то существует число $j_0 \in$N, что при $j \geq j_0$ $\varepsilon_{n_j}(f,x) \leq \sigma$. Полагая $u = \varepsilon_{n_j}(f,x)$ из (21) следует (12). Если же j$\leq j_0$ соотношение (12) получается за счет постоянного числа A. Теорема 2 доказана.

Пусть $(n_j) \in \Delta(\mu)$ и последовательность (λ_k) положительных чисел удовлетворяет неравенству

$$\left\{\frac{1}{\beta_{n_j}}\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}(\lambda_k)^{\sigma}\right\}^{\frac{1}{\sigma}} \leq \frac{A}{\beta_{n_j}}\sum_{k=n_{j-1}}^{n_j-1}\lambda_k, \forall j, \sigma > 1. \tag{22}$$

Множество последовательностей чисел удовлетворяющих соотношению (22) обозначим $\Lambda_{\sigma,\mu}$

Теорема 3. *Пусть функция $f \in L_{p,\alpha}[I] \cap L_{2,\alpha}[T]$, функция α на I ограничена, $p > 1$, функция $\phi_n(t,x)$ ядро типа Дирихле. Если $x \in (c,d)$ является p- точкой Лебега функции f, $\varphi \in \phi_1$, а последовательность $(\lambda_k) \in \bigwedge_{\sigma,\eta}$ то*

$$\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\lambda_k\varphi(|f_k(x) - f(x)|) \leq A\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\lambda_k\varphi(\varepsilon_k(f,x)). \tag{23}$$

Доказательство. Применяя неравенство Гельдера, имеем

$$\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\lambda_k\varphi(|f_k(x) - f(x)|) \leq$$

$$\leq \left\{\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}(\varphi(|f_k(x) - f(x)|))^{\sigma_1}\right\}^{\frac{1}{\sigma_1}}\left\{\frac{1}{\beta_{n_j}}\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}(\lambda_k)^{\sigma}\right\}^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Так как функций φ и φ^{σ_1} принадлежат множеству ϕ_1, в силу теоремы 2 и соотношения (6), получим

$$\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\lambda_k\varphi(|f_k(x) - f(x)|) \leq$$

$$\leq A\varphi\left(\varepsilon_{n_j}(f,x)\right)\beta_{n_j}\sum_{k=n_{j-1}}^{n_j-1}\lambda_k \leq A\sum_{k=n_{j-1}}^{n_j-1}\lambda_k\,\varphi(\varepsilon_k(f,x)).$$

Теорема 4. *Пусть функция $f \in L_{p,\alpha}[I] \cap L_{2,\alpha}[\mathrm{T}]$, функция α на I ограничена, p>1, функция $\phi_n(t,x)$ядро типа Дирихле. Если $x \in (c,d)$ является p - точкой Лебега функции f, $\varphi \in \phi_1$, последовательность $(n_j) \in \Delta(\mu)$, а $(\lambda_k) \in \Lambda_{\sigma,\mu}$, то*

$$\sum_{k=n_j}^{\infty}\lambda_k\varphi(|f_k(x) - f(x)|) \leq A\sum_{k=n_{j-1}}^{\infty}\lambda_k\,\varphi(\varepsilon_{\mathrm{k}}(f,x)).$$

Вообще

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\varphi(|f_k(x) - f(x)|) \leq A\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\,\varphi(\varepsilon_{\mathrm{k}}(f,x)).$$

Доказательство. Представляя слагаемые ряда в пачки и, используя теорему 3, получим

$$\sum_{k=n_j}^{\infty} \lambda_k \varphi \left(\left|f_k\left(x\right)-f\left(x\right)\right|\right)=\sum_{\mu=j}^{\infty} \sum_{k=n_\mu}^{n_{\mu+1}-1} \lambda_k \varphi \left(\varepsilon_{\mathrm{k}}\left(f,x\right)\right) \leq$$

$$\leq A \sum_{\mu=j}^{\infty} \sum_{k=n_{\mu-1}}^{n_\mu-1} \lambda_k \varphi \left(\varepsilon_{\mathrm{k}}\left(f,x\right)\right)=A \sum_{k=n_{j-1}}^{\infty} \lambda_k\, \varphi \left(\varepsilon_{\mathrm{k}}\left(f,x\right)\right).$$

Второе утверждение теоремы следует из первого за счет увеличения числа А. Пусть дана положительная матрица $(\lambda_{k,n})$ – определяющая регулярный метод суммирования рядов. Из теоремы 4 получим

Теорема 5. *Пусть функция* $f \in L_{p,\alpha}\left[I\right] \cap L_{2,\alpha}\left[\mathrm{I}\right]$, *функция* α *на* I *ограничена,* $p \geq 1$, *функция* $\phi_n\left(t,x\right)$ *является ядром типа Дирихле. Если* $x \in (c,d)$ *является* p *- точкой Лебега функции* f, $\varphi \in \phi_1$, *последовательность* $(n_j) \in \Delta\left(\mu\right)$ *и* $(\lambda_{k,n}) \in \Lambda_{\sigma,\mu}$, $n \in N_0$ *то*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{k,n} \varphi \left(\left|f_k\left(x\right)-f\left(x\right)\right|\right) \leq A \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{k,n}\, \varphi \left(\varepsilon_{\mathrm{k}}\left(f,x\right)\right).$$

На основании теоремы 5, в силу регулярности метода суммирования, определяемая матрицей $(\lambda_{k,n})$, так как

$$\lim_{n\to\infty} \varphi \left(\varepsilon_{\mathrm{n}}\left(f,x\right)\right)=0,$$

следует

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{k,n} \varphi \left(\left|f_k\left(x\right)-f\left(x\right)\right|\right)=0,$$

в частности,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \varphi \left(\left|f_k\left(x\right)-f\left(x\right)\right|\right)=0.$$

Отметим, что некоторые результаты в более частном виде были анонсированы в работе[5].

Список использованных источников

1. *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов. Издательство: М.: Иностранная литература. 1963. 360 с.
2. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. Москва, изд-во: Госиздат физмат литературы, 1961. 936 с.
3. *Пачулиа Н. Л.* Экстремальные задачи теорий сильного суммирования рядов Фурье. Сухум. АГУ. 2017. 204 с.
4. *Totik V.* Notes of Fourier series. Strong approximation. J. approximation theory. 1985. V. 45. P. 105–111.
5. *Пачулиа Н. Л., Пачулия Н. Н.* О поведении сильных средних методов суммирования уклонений функции сингулярными интегралами // Сб. трудов Абхазский Госуниверситет 90. Юбилейное научное издание. Москва. 2022. С. 42–46.

Поступила 21.11.2022; одобрена после рецензирования 27.11.2022; принята к публикации 08.12.2022.

Об авторах:

Пачулиа Ниазбей Лукич, доктор физико-математических наук, профессор, академик АН Абхазии, декан физико-математического факультета Абхазского государственного университета (Республика Абхазия, г. Сухум, ул.Университетская 1), http://www.mathnet.ru/rus/person32205, https://mathscinet.ams.org/mathscinet/MRAuthorID/193066, niaz-pachulia@rambler.ru

Пачулия Наталья Ниазбеевна, старший преподаватель кафедры прикладной математики и информатики Абхазского государственного университета (Республика Абхазия, г. Сухум, ул.Университетская 1), n_pachulia@inbox.ru.

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

References

1. *G. Alexits* Convergence Problems of orthogonal series. Publisher: M.: Foreign Literature. 1963. 360 p.
2. *N. K. Bari* Trigonometricheskie ryady [Trigonometric series]. Moscow, publishing house: Gosizdat fizmat literature, 1961. 936 p.
3. *N. L. Pachulia* Ekstremal'nye zadachi teorij sil'nogo summirovaniya ryadov Fur'e [Extremal problems of strong summation theories of Fourier series]. Sukhum. ASU. 2017. 204 p.
4. *V. Totik* Notes of Fourier series. Strong approximation. J. approximation theory. 1985. V. 45. P. 105–111.
5. *N. L. Pachulia, N. N. Pachuliya* O povedenii sil'nyh srednih metodov summirovaniya uklonenij funkcii singulyarnymi integralami [On the behavior of strong mean methods for summation of function deviations by singular integrals]. Sb. trudov Abhazskij Gosuniversitet 90. Yubilejnoe nauchnoe izdanie. Moscow. 2022. P. 42–46.

Submitted 21.11.2022; approved after reviewing 27.11.2022; accepted for publication 08.12.2022.

About the authors:

Niazbey Lukich Pachulia, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academician of the Academy of Sciences Abkhazia, Dean of the Faculty of Physics and Mathematics of the Abkhazian State University (Republic of Abkhazia, Sukhum, Universitetskaya st. 1), http://www.mathnet.ru/rus/person32205, https://mathscinet.ams.org/mathscinet/MRAuthorID/193066, niaz-pachulia@rambler.ru

Natalia Niazbeevna Pachulia, Senior Lecturer, Department of Applied Mathematics and Informatics of the Abkhazian State University (Republic of Abkhazia, Sukhum, Universitetskaya st. 1), n_pachulia@inbox.ru.

The authors have read and approved the final version of the manuscript.