МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

О конструктивных характеристиках сильных преобразований типа Марцинкевича рядов Фурье на классах $C(T^m)$

Пачулиа Н.Л. – академик АНА, Пачулиа Н.Н.

Пусть $C = C(T^m)(T = [-\pi, \pi])$ – множество 2π –периодических по каждой из m переменных, непрерывных функции, $x = (x_1, \ldots, x_m) \in R^m$, $\mathcal{P} = \{p = (p_1, \ldots, p_m) : p_j = 0$ или $1\}$, $dt = dt_1 \ldots \mathrm{d}t_m,\ k \in R^m$ и

$$a_k^{(p)}(f) = \frac{1}{\pi^m} \int\limits_{T^m} f(t) \prod_{j=1}^{m} \cos\left(k_j t_j + \frac{1}{2}\pi p_j\right) dt,$$

коэффициенты Фурье функции $f \in C(T^m)$, а ряд

$$S[f] = \sum_{k \in N_0^m} 2^{-\beta(p)} \sum_{p \in \mathcal{P}} 2^{-\beta(p)} a_k^{(p)}(f) \prod_{j=1}^{m} \cos\left(k_j t_j + \frac{1}{2}\pi p_j\right) = \sum_{k \in N_0^m} A_k(f, x), \tag{1}$$

ее ряд Фурье, где $N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, E^m- произведение множества E на самого себя m-раз, $\beta(p)-$ количество нулевых координат точки p, $S_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(f, x)$ – прямоугольные частные суммы порядка n ряда (1), а $\rho_n(f, x) = S_n(f, x) - f(x)$, $(n = (n_1, \ldots, n_m) \in N_0^m)$ – соответствующее отклонение.

Отметим, что прямоугольные частные суммы как аппарат приближения, даже для непрерывной функции (в частности двух переменных), не хорош см. [1]. Однако величины $S_{n\alpha}(f, x)$ сохраняют некоторые свойства частных сумм функции одной переменной [2], где $\alpha \in \mathcal{P}$, $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$ и $n\alpha = (n\alpha_1, \ldots, n\alpha_m)$.

Впервые в работе [3], при $m = 1$, поставлена задача об исследовании величин

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |\rho_{k\alpha}(f, x)|, n \in N, \tag{2}$$

для суммируемых функций $f \in L$, которые в дальнейшем стали называть сильными средними арифметическими ряда (1). Много работ посвящены исследованию сильных средних для произвольного регулярного метода суммирования рядов Фурье, определяемых неотрицательной матрицей $\lambda = (\lambda_k^n)$

$$H_{\varphi,n}(x) = H_{\varphi,n}(f, x, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^n \varphi(|\rho_{k\alpha}(f, x)|), \tag{3}$$

и так же величин вида

$$H_{\varphi}(x) = H(f, x, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \varphi(|\rho_{k\alpha}(f, x)|), \tag{4}$$

которые, назовем сильным преобразованием типа Марцинкевича ряда Фурье функции f, где $\varphi \in \phi, \phi-$ множество возрастающих, непрерывных и неотрицательных на $[0, \infty)$

функций, таких, что $\varphi(0) = 0$, причем $\varphi(u) > 0$ при $u > 0$, а $\lambda = (\lambda_k)$ некоторая последовательность неотрицательных чисел. Информацию, об этих работах, к примеру, можно найти в работах [4-5].

Целью данной работы является сравнение модулей непрерывности функций $\omega\left(H_{\varphi}, \delta\alpha\right)$ и $\omega\left(H_{\varphi,n}, \delta\alpha\right)$ с величиной $\omega\left(f, \delta\alpha\right)$, где

$$\omega\left(g, \delta\alpha\right) = sup_{|t_j|\leq\delta_j, x\in \mathrm{C}(T^m)}\left\{\left|g\left(x + t\left(\alpha\right)\right) - g\left(x\right)\right|\right\},$$

$$\alpha = \left(\alpha_1, \ldots, \alpha_m\right),\ \alpha \in \mathcal{P}, x, t \in R^m, x + t\left(\alpha\right) = \left(x_1 + t_1\left(\alpha_1\right), \ldots, x_m + t_m\left(\alpha_m\right)\right),$$

$t_j\left(\alpha\right) = t_j$, если $\alpha_j = 1$, а $t_j\left(\alpha\right) = 0$ если $\alpha_j = 0$, кроме того $\delta = \left(\sum_{j=1}^{m} {\delta_j}^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Для формулирования результатов работы сначала введем ряд обозначений и приведем некоторые известные результаты.

Пусть (n_k) – последовательность натуральных чисел такая, что

$$1 + \frac{1}{\sigma} \leq \frac{n_{k+1}}{n_k} \leq \sigma, \forall \in N, \tag{5}$$

причем $n_0 = 1$. Множество последовательностей (n_k), удовлетворяющих неравенствам (5) обозначим $\mathfrak{N}_{\sigma}$.

Пусть $\Lambda_{\tau}\left(\mathfrak{N}_{\sigma}\right)$ – множество неотрицательных последовательностей чисел (λ_k), для которых при $\tau > 1$, выполняются неравенства

$$\left\{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\left(\lambda_k\right)^{\tau}\right\}^{\frac{1}{\tau}} \leq \frac{A}{n_j - n_{j-1}}\sum_{k=n_{j-1}}^{n_j-1}\lambda_k, \forall j \geq 1, \tag{6}$$

где A - здесь и далее означает положительное постоянное, возможно, не одно и то же число.

Из условия $\left(n_j\right) \in \mathfrak{N}_{\sigma}$ следует, что последовательность $\left(n_{j+1} - n_j\right)\left(n_j - n_{j-1}\right)^{-1}$ ограничена. Тогда неравенство (6) можно записать в виде

$$\left\{\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\left(\lambda_k\right)^{\tau}\right\}^{\frac{1}{\tau}} \leq A(n_{j+1} - n_j)^{-\frac{1}{\tau_1}}\sum_{k=n_{j-1}}^{n_j}\lambda_k, \tau_1 = \frac{\tau}{\tau - 1}.$$

Любая неотрицательная невозрастающая последовательность чисел (λ_k) удовлетворяет неравенству (6).

Пусть ϕ_{γ} $(\gamma > 0)$ – подмножество множества функций $\varphi \in \phi$, для которого выполняются условия

$$\varphi\left(2u\right) \leq a\varphi\left(u\right), \quad u \in [0, \sigma_1], \tag{7}$$

$$\ln\varphi\left(u\right) = 0\left(u^{\gamma}\right), \quad \text{при } u \to \infty. \tag{8}$$

К примеру, функция $\varphi\left(u\right) = u^q$, $q > 0$ принадлежит ϕ_{γ}, при любом $\gamma > 0$, а функция $\varphi\left(u\right) = e^{qu} - 1$, $q > 0$ принадлежит множеству ϕ_1. Очевидно, что $\phi_{\gamma} \subset \phi_{\frac{1}{m}}$, $0 < \gamma \leq \frac{1}{m}$.

Отметим, что если $\left(n_j\right) \in \mathfrak{N}_{\sigma}$, $f \in C\left(T^m\right), \varphi \in \phi_{\frac{1}{m}}$, $\alpha \in \mathcal{P}$ в работе [5] доказана справедливость неравенства

$$\frac{1}{n_{j+1} - n_j}\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\varphi\left(\left|\rho_{k\alpha}\left(f, x\right)\right|\right) \leq A\varphi\left(E_{\alpha n_j}\left(f\right)\right), \tag{9}$$

где $E_{k\alpha}(f)$ – наилучшее приближение функции $f \in C(T^n)$ тригонометрическими полиномами m переменных порядка не выше kα.

В работе [5] доказано утверждение: если $f \in C(T^m), (n_j) \in \mathfrak{N}_\sigma, (\lambda_k) \in \Lambda_\tau(\mathfrak{N}_\sigma)$, $\varphi \in \phi_{\frac{1}{m}}$, $\alpha \in \mathcal{P}$, то

$$\sum_{k=n_{j+1}}^{\infty} \lambda_k \varphi(|\rho_{k\alpha}(f,x)|) \leq A \sum_{k=n_j}^{\infty} \lambda_k \varphi(E_{k\alpha}(f)), \forall j \in N, \tag{10}$$

в частности

$$H_\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \varphi(|\rho_{k\alpha}(f,x)|) \leq A \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \varphi(E_{k\alpha}(f)). \tag{11}$$

Отметим, что если $\varphi(u) = u^q, q > 0, \varphi(u) = exp\left(qu^{1/m}\right) - 1$ и последовательность чисел (λ_k) удовлетворяет неравенствам (6) в случае $n_j = 2^j$ соотношения (11) – (12) получены в работе [4].

Основные результаты работы содержатся в следующих утверждениях:

Теорема 1. *Пусть функция* $f \in C(T^m), (n_j) \in \mathfrak{N}_\sigma, (\lambda_k) \in \Lambda_\tau(\mathfrak{N}_\sigma)$, $\tau > 1$, $\alpha \in \mathcal{P}$, $q > 0$ *и* $\varphi(u) = \mathrm{u}^q$. *Если* $M = (\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k (E_{k\alpha}(f))^q) < \infty$. *Тогда функция* $H_q \in C$ *и при* $q \geq 1$ *справедливо неравенство*

$$\omega\left(H_q^{\frac{1}{q}}, \delta\alpha\right) \leq A\left(\omega(f,\delta\alpha)\left(\sum_{k=0}^{[\delta^{-1}]} \lambda_k\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=[(\sigma\delta)^{-1}]}^{\infty} \lambda_k (E_{k\alpha}(f))^q\right)^{\frac{1}{q}}\right), \tag{12}$$

а при $0 < q < 1$

$$\omega(H_q, \delta\alpha) \leq A(\omega(f,\delta\alpha))^q \sum_{k=0}^{[\delta^{-1}]} \lambda_k + \sum_{k=[(\sigma\delta)^{-1}]}^{\infty} \lambda_k (E_{k\alpha}(f))^q, \tag{13}$$

где $[a]$ – *целая часть числа* a.

В условиях теоремы 1, если сходится ряд $\sum_{k\in \mathrm{N}} \lambda_k$, то используя аналог неравенства Джексона [7], для функции m переменных, при q≥ 1 из неравенства (12) будем иметь

$$\omega\left(H_q^{\frac{1}{q}}, \delta\alpha\right) \leq A\omega(f,\delta\alpha),$$

а при $0 < q < 1$ из (13) получаем

$$\omega(H_q, \delta\alpha) \leq A(\omega(f,\delta\alpha))^q.$$

Пусть (λ_k^{n}) неотрицательная матрица, определяющая регулярный метод λ суммирования рядов, причем $\forall n \in N_0$ последовательность чисел $(\lambda_k^n) \in \Lambda_\tau(\mathfrak{N}_\sigma)$. Множество таких матриц обозначим через $\Lambda_\sigma(\mathfrak{N}_\sigma, N_0)$.

Теорема 2. *Пусть функция* $f \in \mathrm{C}(T^m)$, $(n_j) \in \mathfrak{N}_\sigma$, $\left(\lambda_k^{(n)}\right) \in \Lambda_\tau(\mathfrak{N}_\sigma, N_0)$, $\alpha \in \mathcal{P}$, $\varphi(u) = u^q$, $q > 0$. *Тогда функция* $H_{q,n} \in C(T^m), \forall n \in N_0$. *Если* $q \geq 1$, *то* $\forall n \in N_0$

$$\omega\left((H_{\mathrm{q},n})^{\frac{1}{q}}, \alpha\delta\right) \leq A\omega(f,\delta\alpha). \tag{14}$$

Если же $0 < q < 1$, *то* $\forall n \in N_0$

$$\omega\left(H_{q,n}, \delta\alpha\right) \le A(\omega\left(f, \delta\alpha\right))^q. \tag{15}$$

Пусть

$$\widetilde{\phi}_\gamma = \{\varphi \in \phi_\gamma : \left|\varphi\left(x\right) - \varphi\left(y\right)\right| \ \le \varphi\left(\left|x - y\right|\right)\left[\varphi\left(u\right) + 1\right]\}, \gamma > 0, \tag{16}$$

где $u = |x|$ или $u = |y|$.

Справедливы утверждения:

Теорема 3. *Пусть* $f \in C(T^m), (n_j) \in \mathfrak{N}_\sigma, (\lambda_k) \in \Lambda_\tau\left(\mathfrak{N}_\sigma\right)$, $\varphi \in \widetilde{\phi}_{\frac{1}{m}}$, $\alpha \in \mathcal{P}$. *Тогда, если* $M = \sum_{k \in N_0} \lambda_k \varphi\left(E_{k\alpha}\left(f\right)\right) < \infty$, *то функция* $H_\varphi \in C\left(T^m\right)$ *и*

$$\omega\left(H_\varphi, \delta\alpha\right) \le A\left[\varphi\left(\omega\left(f, \delta\alpha\right)\right)\sum_{k=0}^{\left[\delta^{-1}\right]}\lambda_k + \sum_{k=\left[(\sigma\delta)^{-1}\right]}^{\infty}\lambda_k\varphi\left(E_{k\alpha}\left(f\right)\right)\right]. \tag{17}$$

В частности, если ряд $\sum_{k \in N} \lambda_k$ сходится, то

$$\omega\left(H_\varphi, \delta\alpha\right) \le A\varphi(\omega\left(f, \delta\alpha\right)). \tag{18}$$

Теорема 3. *Пусть* $f \in C(T^m), (n_j) \in \mathfrak{N}_\sigma$, $\left(\lambda_k^{(n)}\right) \in \Lambda_\tau\left(\mathfrak{N}_\sigma, N_0\right)$, $\tau > 1$, $\alpha \in \mathcal{P}$, $\varphi \in \widetilde{\phi}_{\frac{1}{m}}$. *Тогда* $H_{\varphi,n} \in C\left(T^m\right)$, $\forall n \in N_0$ *и*

$$\omega\left(H_{\varphi,n}, \delta\alpha\right) \le A\varphi\left(\omega\left(f, \delta\alpha\right)\right). \tag{19}$$

Для доказательства теорем сначала приведем ряд утверждений. В работе [6] доказано: если $f \in \mathrm{C}\left(T^m\right), (n_j) \in \mathfrak{N}_\sigma$, $\alpha \in \mathcal{P}$, $q > 0$, то $\forall B \subset [n_j, 2n_{j+1} - 1] \cap N$ справедливо неравенство

$$\left\{\frac{1}{r}\sum_{k \in B}\left|\mathrm{S}_{k\alpha}\left(f, x\right)\right|^q\right\}^{1/q} \le A\|f\|_C ln^m\frac{ne}{r}\ , \tag{20}$$

где $r = |B|-$ мощность множества B.

Обозначим $\Delta_t g\left(x\right) = g\left(x + t\left(\alpha\right)\right) - g\left(x\right), t\left(\alpha\right) = \left(t_1\left(\alpha\right), \ldots, t_m\left(\alpha\right)\right)$, $t_j\left(\alpha\right) = t_j$, если $\alpha_j = 1$; $t_j\left(\alpha\right) = 0$, если $\alpha_j = 0$, а $\alpha = \left(\alpha_1, \ldots, \alpha_m\right)$.

Справедливо утверждение

Лемма 1. *Пусть* $f \in \mathrm{C}\left(T^m\right), (n_j) \in \mathfrak{N}_\sigma$, $\alpha \in \mathcal{P}$. *Тогда* $\forall q > 0$, $\forall B \subset [n_j, n_{j+1} - 1] \cap N$, *выполняется неравенство*

$$\left\{\frac{1}{r}\sum_{k \in B}\left|\Delta_{t(\alpha)}\rho_{k\alpha}\left(f, x\right)\right|^q\right\}^{1/q} \le A\omega\left(f, \delta\alpha\right) ln^m\frac{(n_{j+1} - n_j)e}{r}, \tag{21}$$

где $\Delta_t\rho_{k\alpha}\left(f, x\right) = \rho_{k\alpha}\left(f, x + t\left(\alpha\right)\right) - \rho_{k\alpha}\left(f, x\right)$.

Если $r = n_{j+1} - n_j$, *из* (21) *следует*

$$\left\{\frac{1}{n_{j+1} - n_j}\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\left|\Delta_{t(\alpha)}\rho_{k\alpha}\left(f, x\right)\right|^q\right\}^{1/q} \le A\omega\left(f, \delta\alpha\right).$$

Доказательство. Очевидно, что $\Delta_t \rho_{k\alpha}(f,x) = \Delta_{t(\alpha)} f(x) - \mathrm{S}_{k\alpha}\left(\Delta_{t(\alpha)}, x\right)$. Тогда считая $q > 1$, используя неравенство Минковского и соотношение (20) получим (21). Если $0 < q \leq 1$, то неравенство (21) следует из доказанной части леммы, так как сильные степенные средние не убывают относительно показателя степени.

В работе [5] (при $m = 1$ в [6]) доказано утверждение: если $\varphi \in \phi_\gamma$ $(\gamma > 0)$, то для некоторого числа $\sigma_1 \in (0,1)$, $\forall u \in [0, \sigma_1]$ имеет место неравенство

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(\nu u)\, exp\left(-a_1 u^{\gamma}\right) \leq A\varphi(u). \tag{22}$$

Лемма 2. *Пусть* $f \in C(T^m), (n_j) \in \mathfrak{N}_\sigma, \varphi \in \phi_{\frac{1}{m}}, \omega(f, \delta\alpha) \leq \sigma_1$. *Тогда если* $\alpha \in \mathcal{P}$, *то*

$$K(f, \varphi, x, n_j) = \frac{1}{n_{j+1} - n_j} \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \left|\varphi\left(\Delta_{t(\alpha)} \left|\rho_{k\alpha}(f,x)\right|\right)\right| \leq A\varphi\left(\omega(f, \delta\alpha)\right). \tag{23}$$

Доказательство. Если $\omega(f, \delta\alpha) = 0$, то из неравенства (21) тривиально следует (23). Пусть теперь $0 < \omega(f, \delta\alpha) \leq \sigma_1$.

Введем обозначения

$$B_\nu = \{\ k \in [n_j, n_{j+1} - 1] \cap N : (\nu - 1)\,\omega(f, \delta\alpha) \leq \left|\Delta_{t(\alpha)} \rho_{k\alpha}(f,x)\right| < \nu\omega(f, \delta\alpha)\,,$$

$$\chi_\nu = \begin{cases} 1, B_\nu \neq 0, \\ 0, B_\nu = 0. \end{cases}$$

Представляя слагаемые в группы по множествам B_ν, в силу возрастания функции φ получим

$$K(f, \varphi, x, n_j) = \frac{1}{n_{j+1} - n_j} \sum_{\nu=1}^{\infty} \chi_\nu \sum_{k \in B_\nu} \varphi\left(\left|\Delta_{t(\alpha)} \rho_{k\alpha}(f,x)\right|\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{n_{j+1} - n_j} \sum_{\nu \in N} \chi_\nu \varphi\left(\nu\omega(f, \delta\alpha)\right) |B_\nu|. \tag{24}$$

Рассматривая неравенство (22) при $\mu = 1$ и принимая $B = B_\nu$ будем иметь

$$(\nu - 1)\,\omega(f, \delta\alpha) \leq A\omega(f, \delta\alpha)\, ln^m \frac{(n_{j+1} - n_j)e}{r}. \tag{25}$$

Из (25), при $\nu > 1$ имеем

$$|B_\nu| = r \leq (n_{j+1} - n_j) exp\left(1 - a_1 \nu^{\frac{1}{m}}\right),\ a_1 = (2A)^{-1}.$$

Следовательно

$$K(f, \varphi, x,\ n_j) \leq e\left[\sum_{\nu=2}^{\infty} \varphi\left(\nu\omega(f, \delta\alpha)\, exp\left(-a_1 \nu^{\frac{1}{m}}\right) + \varphi\left(\omega(f, \delta\alpha)\right)\right)\right]. \tag{26}$$

Считая $\omega(f, \delta\alpha) = u$ в (26), из (22) получим (23). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть* $f \in C\left(T^m\right), \ (n_j) \in \mathfrak{N}_\sigma, \ \varphi \in \widetilde{\phi}_{\frac{1}{m}}$. *Тогда* $\forall \alpha \in \mathcal{P}$

$$\left\{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\left|\ \Delta_{t(\alpha)}\varphi\left(\left|\rho_{k\alpha}\left(f,x\right)\right|\right)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}} \leq A\varphi\left(\omega\left(f,\delta\alpha\right)\right). \tag{27}$$

Доказательство. Если $\omega\left(f,\delta\alpha\right)=0$, то в силу неравенства (21) следует (27). Пусть $\omega\left(f,\delta\right)>0$. Из включения $\varphi \in \phi_{\frac{1}{m}}$ следует $\varphi^q \in \phi_{\frac{1}{m}}$, $q>0$. Тогда для функции φ^q неравенство (22) выполняется, возможно, с другим числом σ_1. Если $\omega\left(f,\delta\alpha\right)\geq\sigma_1$, неравенство (22) следует из (9) так как

$$K\left(f,\varphi,x,n_j\right) \leq 2A\varphi\left(E_{\alpha n_j}\left(f\right)\right) \leq A_1 \leq \frac{A_1\omega\left(f,\delta\alpha\right)}{\sigma_1}.$$

Пусть теперь $\omega\left(f,\delta\alpha\right)\leq\sigma_1$. Применяя неравенство Гельдера в силу $\varphi \in \widetilde{\phi}_{\frac{1}{m}}$ получим

$$K\left(f,\varphi,x,n_j\right)=\frac{1}{n_{j+1}-n_j}\sum_{k=n_j}^{n_{J+1}-1}\varphi\left(\left|\Delta_{t(\alpha)}\rho_{k\alpha}\left(f,x\right)\right|\right)\varphi\left(\left|\rho_{k\alpha}\left(f,x\right)+1\right|\right)\leq$$

$$\left\{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-n_j}\left(\varphi\left(\left|\Delta_{t(\alpha)}\rho_{k\alpha}\left(f,x\right)\right|\right)\right)^q\right\}^{\frac{1}{q}}\left\{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\left(\varphi\left(\left|\rho_{k\alpha}\left(f,x\right)\right|\right)+1\right)^{q_1}\right\}^{\frac{1}{q_1}}=$$

$$=K_1\left(f,\varphi,x,n_j\right)K_2\left(f,\varphi,x,n_j\right), \ q_1=\frac{q}{q-1}.$$

В силу неравенства (9) $K_2\left(f,\varphi,x,n_j\right)\leq A$. Учитывая, что $\varphi^q \in \phi_{\frac{1}{m}}$, из леммы 2 следует $K_1\left(f,\varphi,x,n_j\right)\leq A\varphi\left(\omega\left(f,\delta\alpha\right)\right)$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть* $f \in C\left(T^m\right), (n_j) \in \mathfrak{N}_\sigma, \varphi \in \phi_{\frac{1}{m}}, (\lambda_k) \in \Lambda_\tau\left(\mathfrak{N}_\sigma\right), \ \alpha \in \mathcal{P}$. *Тогда, если* $\omega\left(f,\delta\right)\leq\sigma_1$ *справедливо неравенство*

$$\mathcal{P}_{n_j}\left(\varphi,x\right)=\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\lambda_k\varphi\left(\left|\Delta_{t(\alpha)}\rho_k\left(f,x\right)\right|\right)\leq A\varphi(\omega\left(f,\delta\alpha\right))\sum_{k=n_{j-1}}^{n_j-1}\lambda_k. \tag{28}$$

Доказательство. Используя сначала неравенство Гельдера и рассуждая как при доказательстве неравенства (23), так как из $\varphi \in \phi_{\frac{1}{m}}$ при $\tau_1>1$ следует $\varphi^{\tau_1} \in \phi_{\frac{1}{m}}$, в силу (27) получим

$$\mathcal{P}_{n_j}\left(\varphi,x\right)\leq\left\{\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\left(\lambda_k\right)^\tau\right\}^{\frac{1}{\tau}}\left\{\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\varphi^{\tau_1}\left(\left|\Delta_{t(\alpha)}\rho_k\left(f,x\right)\right|\right)\right\}^{\frac{1}{\tau_1}}\leq$$

$$\leq A\left\{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\varphi^{\tau_1}\left(\left|\Delta_{t(\alpha)}\rho_k\left(f,x\right)\right|\right)\right\}^{\frac{1}{\tau_1}}\sum_{k=n_{j-1}}^{n_j-1}\lambda_k\leq A\varphi\left(\omega\left(f,\delta\alpha\right)\right)\sum_{k=n_j}^{n_j-1}\lambda_k.$$

Отсюда следует (28).

Используя лемму 3, аналогично доказательству леммы 4 получим утверждение

Лемма 5. *Пусть* $f\in C(T^m), (n_j)\in\mathfrak{N}_\sigma, \varphi\in\widetilde{\phi}_{\frac{1}{m}}, (\lambda_k)\in\Lambda_\tau(\mathfrak{N}_\sigma), \alpha\in\mathcal{P}$. *Тогда*

$$h_{n_j}(f,x,\lambda)=\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\lambda_k|\Delta_{t(\alpha)}\varphi(|\rho_{k\alpha}(f,x)|)|\le A\varphi(\omega(f,\delta\alpha))\sum_{k=n_{j-1}}^{n_j-1}\lambda_k.$$

Доказательство теоремы 1. Сначала докажем соотношение (12). Используя неравенство Минковского при $q\ge 1$, получим

$$\left|\left\{\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^q\right\}^{\frac{1}{q}}-\left\{\sum_{k=0}^{\infty}|b_k|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\right|\le\left\{\sum_{k=0}^{\infty}|a_k-b_k|^q\right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{29}$$

На основании неравенства (29) имеем

$$\left|\Delta_{t(\alpha)}H^{\frac{1}{q}}(x)\right|=\left|H_q^{\frac{1}{q}}(f,x+t(\alpha),\lambda)-H_q^{\frac{1}{q}}(f,x,\lambda)\right|\le\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left|\Delta_{t(\alpha)}\rho_{k\alpha}(f,x)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}, \tag{30}$$

где $\rho_{k\alpha}(f,x)=S_{k\alpha}(f,x)-f(x)$.

Пусть $0<\delta<1$. Найдем $j\in N$ такое, что $n_j\le\delta^{-1}<n_{j+1}$. Положим

$$e_1=\{k\in[0,n_1-1]\cap N\}, e_2=\{k\in[n_1,\ n_j-1]\cap N\}, e_3=\{k\in[n_j,\ \infty)\cap N\}.$$

Разбивая на части сумму в (30) по множествам e_l, $l=\overline{1,3}$ с применением неравенства Минковского, получим

$$\left|\Delta_{t(\alpha)}H_q^{\frac{1}{q}}(x)\right|\le\sum_{l=1}^{3}\beta_{n_j}^{(l)}(x,q),$$

где

$$\beta_{n_j}^{(l)}(x,q)=\left\{\sum_{k\in e_l}\lambda_k\left|\Delta_{t(\alpha)}\rho_{k\alpha}(f,x)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Очевидно, что

$$\beta_{n_j}^{(3)}(x,q)\le\left\{\sum_{k=n_{j+1}}^{\infty}\lambda_k|\rho_{k\alpha}(f,x+t)|^q\right\}^{\frac{1}{q}}+\left\{\sum_{k=n_{j+1}}^{\infty}\lambda_k|\rho_{k\alpha}(f,x)|^q\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Тогда, в силу неравенства (10), получим

$$\beta_{n_j}^{(3)}(x,q)\le 2A\left\{\sum_{k=n_j}^{\infty}\lambda_k\left(E_{k\alpha}(f)\right)^q\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Далее, имеем

$$\beta_{n_j}^{(2)}(x,q)=\left\{\sum_{k=n_0}^{n_{j+1}-1}\lambda_k\left|\Delta_{t(\alpha)}\rho_{k\alpha}(f,x)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}=\left\{\sum_{l=0}^{j}\sum_{k=n_l}^{n_{l+1}-1}\lambda_k\left|\Delta_{t(\alpha)}\rho_{k\alpha}(f,x)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

На основании леммы 4 получим

$$\sum_{k=n_l}^{n_{l+1}-1} \lambda_k \left|\Delta_{t(\alpha)}\rho_{k\alpha}\left(f,x\right)\right|^q \leq A(\omega\left(f,\delta\alpha\right))^q \sum_{k=n_{l-1}}^{n_l} \lambda_k. \tag{31}$$

Тогда

$$\beta_{n_j}^{(2)}\left(x,q\right) \leq A\omega\left(f,\delta\alpha\right)\left(\sum_{k=n_0}^{n_1} \lambda_k\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Так как

$$\Delta_{t(\alpha)}\rho_{k\alpha}\left(f,x\right) = \frac{1}{\pi}\int_{T^m}\left[f\left(x+u+t\right)-f\left(x+t\right)\right]\prod_{j=1}^{m} D_{k\alpha_j}\left(t_j\right)dt$$

и при $0 \leq k \leq n_1$ справедливо неравенство

$$\left|\Delta_{t(\alpha)}\rho_{k\alpha}\left(f,x\right)\right| \leq A\omega\left(f,\delta\alpha\right), \|t\| \leq \delta.$$

Следовательно

$$\beta_{n_j}^{(1)}\left(x,q\right) \leq A\omega\left(f,\delta\alpha\right)\left(\sum_{k=n_0}^{n_j} \lambda_k\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Таким образом

$$\left|\Delta_{t(\alpha)}H_q^{\frac{1}{q}}\left(x\right)\right| \leq A\left[\omega\left(f,\delta\alpha\right)\left(\sum_{k=n_0}^{n_j} \lambda_k\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=n_j}^{\infty} \lambda_k (E_{k\alpha}\left(f\right))^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] \leq$$

$$\leq A\left[\omega\left(f,\delta\alpha\right)\left(\sum_{k=0}^{\left[\delta^{-1}\right]} \lambda_k\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=\left[(\sigma\delta)^{-1}\right]}^{\infty} \lambda_k (E_{k\alpha}\left(f\right))^q\right)^{\frac{1}{q}}\right].$$

Неравенство (12) доказано.

Для доказательства соотношения (13) используя вместо неравенства (29)

$$\left|\sum_k |a_k|^q - \sum_k |b_k|^q\right| \leq \sum_k |a_k - b_k|^q,$$

получаем

$$\left|H_q\left(f,x+t,\lambda\right) - H_q\left(f,x,\lambda\right)\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \left|\Delta_{t(\alpha)}\rho_{k\alpha}\left(f,x\right)\right|^q.$$

Дальнейшее доказательство неравенства (13) проходит как в первой части теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Теорема 2 следует из теоремы 1 с заменой последовательности (λ_k) на последовательности чисел (λ_k^n) при любом фиксированном $n \in N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Доказательство теоремы 3. Пусть $0 < \delta < 1$. Найдем число j чтобы выполнялось неравенство $n_j \leq \delta^{-1} < n_{j+1}$, очевидно представление

$$\left|\Delta_{t(\alpha)}H_\varphi\left(x\right)\right| = \left|H_\varphi\left(f,x+t\right) - H_\varphi\left(f,x\right)\right| \leq \left|\sum_{k=n_0}^{n_{j+1}-1} \lambda_k \Delta_{t(\alpha)}\varphi\left(\left|\rho_{k\alpha}\left(f,x\right)\right|\right)\right| +$$

$$+\left|\sum_{k=n_{j+1}}^{\infty}\lambda_k\Delta_{t(\alpha)}\varphi\left(\left|\rho_k\alpha\left(f,x\right)\right|\right)\right|=\gamma_{n_j}^{(1)}+\delta_{n_j}^{(2)}.$$

На основании неравенства (10) имеем

$$\gamma_{n_j}^{(2)}\left(f,x\right)\leq 2A\sum_{k=n_j}^{\infty}\lambda_k\varphi\left(E_{k\alpha}\left(f\right)\right).$$

Далее, очевидно что

$$\gamma_{n_j}^{(1)}\left(f,x\right)=\sum_{l=0}^{j}\sum_{k=n_l}^{n_{l+1}-1}\lambda_k\left|\Delta_{t(\alpha)}\varphi\left(\left|\rho_{k\alpha}\left(f,x\right)\right|\right)\right|=\sum_{k=n_0}^{n_1-1}\lambda_k\left|\Delta_{t(\alpha)}\varphi\left(\left|\rho_{k\alpha}\left(f,x\right)\right|\right)\right|+\sum_{l=1}^{j}\gamma_{n_j}^{(1,l)}.$$

Так как функция $\varphi\in\widetilde{\phi}_{\frac{1}{m}}$, то в силу леммы 5

$$\gamma_{n_j}^{(1,l)}\left(f,x\right)\leq A\varphi\left(\omega\left(f,\delta\alpha\right)\right)\sum_{k=n_{l-1}}^{n_l-1}\lambda_k.$$

Следовательно

$$\gamma_{n_j}^{(1)}\left(f,x\right)\leq A\varphi\left(\omega\left(f,\delta\alpha\right)\right)\sum_{k=n_0}^{n_j-1}\lambda_k\leq A\varphi\left(\omega\left(f,\delta\alpha\right)\right)\sum_{k=1}^{\left[\delta^{-1}\right]}\lambda_k.$$

Кроме того с учетом $n_j\leq\delta^{-1}<n_{j+1}$ получим

$$\gamma_{n_j}^{(2)}\left(f,x\right)\leq\sum_{k=\left[\sigma^{-1}n_{j+1}\right]}^{\infty}\lambda_k\varphi\left(E_{k\alpha}\left(f\right)\right)\leq A\sum_{k=\left[\left(\sigma\delta\right)^{-1}\right]}^{\infty}\lambda_k\varphi\left(E_{k\alpha}\left(f\right)\right).$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 4 следует из теоремы 3 заменой последовательности (λ_k) на последовательность (λ_k^n) при каждом $n\in N_0$.

Отметим, что данная работа в случае $m=1$, в более жестких условиях наложенных на входящие в соотношения параметры, была выполнена вторым автором в [8], (см. также [9-10]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бахбух Б., Никишин Е.* О сходимости двойных рядов Фурье от непрерывных функций // Сибирский мат. жур. 1974. Т. 14, № 6. С. 835-838.
2. *Жижиашвили Л.В.* Сопряженные функций и тригонометрические ряды. Тбилиси. ТГУ. 1969.
3. *Hardy G. and Littlewood J.* Sur la series de Fourier dune function a Carre summable // C.R. 1913. V. 153. Pp. 1307-1309.
4. *Гоголадзе Л.Д.* О суммировании кратных тригонометрических рядов и сопряженных функциях // Диссертация на соискание уч. степени доктора ФМ наук. Тбилиси. 1984. 256 с.
5. *Пачулиа Н.Л.* Экстремальные задачи теории сильного суммирования рядов и интегралов Фурье // Диссертация на соискание уч. степени доктора ФМ наук. Киев. 1992. 269 с.

6. *Totik V.* Notes on Fourier Series. Strong approximation // J. approx. theory. 1985. 43. Pp. 105-111.
7. *Тиман М.Ф.* Теория приближения функции действительного переменного. Москва: ФИЗМАТГИЗ. 1960.
8. *Пачулиа Н.Н.* Структурные свойства сильных средних рядов Фурье // Вопросы суммирования простых и кратных рядов Фурье. Сухум. АГУ. 2003. С. 17-48.
9. *Пачулиа Н.Л., Пачулиа Н.Н.* О конструктивных характеристиках степенных сильных преобразовании рядов Фурье // Проблемы теории приближения функции и смежные вопросы. Киев. Институт математики НАН Украины. 2007. С. 247-257.
10. *Пачулиа Н.Л., Пачулиа Н.Н.* О конструктивных характеристиках степенных сильных преобразовании рядов Фурье // Материалы 9-го международного симпозиума “Ряды Фурье и их приложения”. Новороссийск. 27 мая – 3 июня 2016. С. 23-24.

ABSTRACT

In this paper we establish relations between constructive characteristics of the functions $f \in C(T^m)$ and strong Marcinkiewicz type transformations (in particular average Marcinkiewicz type summation methods) of Fourier series by the trigonometric system.

Keywords.
Fourier series, Marcinkiewicz type transformations.

Abkhazian State University, Sukhum; Niaz-pachulia@rambler.ru

АННОТАЦИЯ

В работе установлены соотношения конструктивных характеристик функции $f \in C(T^m)$ и сильных преобразований типа Марцинкевича (в частности средних типа Марцинкевича методов суммирования) ее ряда Фурье по тригонометрической системе.

Ключевые слова. Ряд Фурье, преобразование типа Марцинкевича.

Абхазский государственный университет, г. Сухум; niaz-pachulia@rambler.ru