МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

Задача Геллерстедта для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа с переменным отклонением

Зарубин А.Н., Чаплыгина Е.В.

Представлено академиком АМАН А.М. Нахушевым

В смешанной области $D = D^+ \cup D^- \cup I$, где $D^+ = \bigcup\limits_{k=0}^{2} D_k^+ \cup J = \big\{(x,y) : 0 < x < \sqrt{3}\tau,$ $0 < y < h\big\}$ $(\tau \equiv const)$ и $D^- = \bigcup\limits_{k=0}^{2} D_k^-$ – эллиптическая и гиперболическая части области D, причем $D_k^+ = \big\{(x,y) : \sqrt{k}\tau < x < \sqrt{k+1}\tau,\ 0 < y < h\big\}$ $(k = 0,1,2)$, $D_k^- = \big\{(x,y) : -y + \sqrt{k}\tau < x < y + \sqrt{k+1}\tau,\ (\sqrt{k} - \sqrt{k+1})\tau/2 < y < 0\big\}$ $(k = 0,1,2)$, $I = \big\{(x,y) : 0 < x < \sqrt{3}\tau, y = 0\big\} = \bigcup\limits_{k=0}^{2} I_k$, $I_k = \big\{(x,y) : \sqrt{k}\tau < x < \sqrt{k+1}\tau, y = 0\big\}(k = 0,1,2)$, $J = \bigcup\limits_{k=1}^{2} J_k,\ J_k = \big\{(x,y) : x = \sqrt{k}\tau,\ 0 < y < h\big\}$ $(k = 1,2)$, рассмотрим уравнение

$$Lu(x,y) \equiv u_{xx}(x,y) + sgn(y)u_{yy}(x,y) =$$

$$= H(x-\tau)u(\sqrt{x^2-\tau^2}, y) + H(\sqrt{2}\tau - x)u(\sqrt{x^2+\tau^2}, y), \tag{1}$$

в котором $H(\xi)$– функция Хевисайда;

$$\alpha_1(x) = \sqrt{x^2-\tau^2} : [\sqrt{n+1}\tau, \sqrt{n+2}\tau] \longrightarrow [\sqrt{n}\tau, \sqrt{n+1}\tau]\ (n = 0,1),$$

$$\big(\alpha_2(x) = \sqrt{x^2+\tau^2} : [\sqrt{n}\tau, \sqrt{n+1}\tau] \longrightarrow [\sqrt{n+1}\tau, \sqrt{n+2}\tau]\ (n = 0,1)\big)$$

растягивающе-запаздывающее (сжимающе-опережающее) отображение, сохраняющее ориентацию, и

$$\alpha_1(\alpha_2(x)) = \alpha_2(\alpha_1(x)) = x, \tag{$*$}$$

$$\alpha_1(\sqrt{k+1}\tau) = \sqrt{k}\tau,\ \alpha_2(\sqrt{k}\tau) = \sqrt{k+1}\tau\ (k = 0,1,2), \tag{$**$}$$

причем, в силу $(*), (**)$,

$$\alpha_2^0(0) = 0,\ \alpha_2^1(0) = \alpha_2(0) = \tau,\ \alpha_2^2(0) = \alpha_2(\alpha_2(0)) = \alpha_2(\tau) = \sqrt{2}\tau,$$

$$\alpha_2^3(0) = \alpha_2\big(\alpha_2(\alpha_2(0))\big) = \alpha_2(\alpha_2(\tau)) = \alpha_2(\sqrt{2}\tau) = \sqrt{3}\tau,$$

то есть

$$0 < \tau = \alpha_2^1(0) < \sqrt{2}\tau = \alpha_2^2(0) < \sqrt{3}\tau = \alpha_2^3(0).$$

Пусть $D_k = D_k^+ \cup D_k^- \cup I_k$ $(k = 0,1,2)$ и

$$u(\sqrt{x^2-\tau^2}, y) = u\big(x - (x - \sqrt{x^2-\tau^2}), y\big) = u(x - \tau_1(x), y) = R_x^{\tau_1(x)}u(x,y),$$

$$u(\sqrt{x^2+\tau^2}, y) = u\big(x + (\sqrt{x^2+\tau^2} - x), y\big) = u(x + \tau_2(x), y) = R_x^{-\tau_2(x)}u(x,y),$$

где $R_x^{\theta(t)}$– оператор сдвига по x : $R_x^{\theta(t)}q(x,y) = q(x - \theta(t), y)$;

$$\tau_1(x) = x - \sqrt{x^2-\tau^2} > 0,\ \tau_2(x) = \sqrt{x^2+\tau^2} - x > 0.$$

Задача G. *Найти в области D функцию*

$$u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D\setminus J)\cap C^2(D\setminus(I\cup J)),$$

удовлетворяющую уравнению (1), краевым условиям

$$u(0,y)=u(\sqrt{3}\tau,y)=0,\ 0\leqslant y\leqslant h, \tag{2}$$

$$u(x,h)=\varphi(x),\ 0\leqslant x\leqslant\sqrt{3}\tau, \tag{3}$$

$$u(x,\sqrt{k}\tau-x)=\psi_k(x),\ \sqrt{k}\tau<x<(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})\tau/2\ (k=0,2), \tag{4}$$

$$u(x,x-\sqrt{2}\tau)=\psi_1(x),\ (1+\sqrt{2})\tau/2<x<\sqrt{2}\tau, \tag{5}$$

условиям сопряжения

$$u(x,0-)=u(x,0+)=\omega(x),\ 0\leqslant x\leqslant\sqrt{3}\tau, \tag{6}$$

$$u_y(x,0-)=u_y(x,0+)=\nu(x),\ 0<x<\sqrt{3}\tau,\ x\neq\tau,\sqrt{2}\tau, \tag{7}$$

условиям согласования

$$\varphi(0)=\varphi(\sqrt{3}\tau)=\psi_0(0)=0,\ \psi_1(\sqrt{2}\tau)=\psi_2(\sqrt{2}\tau),$$

где $\varphi(x),\ \psi_k(x)\ (k=0,1,2)-$ заданные непрерывные достаточно гладкие функции.

Уравнение (1) в терминах функций

$$u_k^{\pm}(x,y)=u(x,y),\ (x,y)\in D_k^{\pm}\ (k=0,1,2) \tag{8}$$

можно записать в форме системы

$$L\bar{u}^{\pm}(x,y)=A\bar{u}^{\pm}(x,y),(x,y)\in D_0^{\pm},$$

где

$$\bar{u}^{\pm}(x,y)=\big(u_0^{\pm}(x,y),u_1^{\pm}(\alpha_2^1(x),y),u_2^{\pm}(\alpha_2^2(x),y)\big)^T,\ A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, \tag{9}$$

которая в характеристических переменных

$$\xi=x+y\sqrt{-sgn\ y},\ \eta=x-y\sqrt{-sgn\ y} \tag{10}$$

будет иметь вид матричного уравнения

$$4\bar{u}_{\xi\eta}^{\pm}(\xi,\eta)=A\bar{u}^{\pm}(\xi,\eta).$$

Решение этого уравнения, найденное методом последовательных приближений или с помощью [1, с. 67-68], можно представить формулой

$$\bar{u}^{\pm}(\xi,\eta)=\bar{u}^{\pm}(0,0)J_0\big(i\sqrt{A\xi\eta}\big)+\int\limits_0^{\xi}J_0\big(i\sqrt{A\eta(\xi-t)}\big)\overline{\Phi}_1^{\pm}(t)dt+$$

$$+\int\limits_0^{\eta}J_0\big(i\sqrt{A\xi(\eta-t)}\big)\overline{\Phi}_2^{\pm}(t)dt, \tag{11}$$

где $\overline{\Phi}_1^{\pm}(t)$, $\overline{\Phi}_2^{\pm}(t)$– произвольные дважды непрерывно дифференцируемые вектор - функции; $i=\sqrt{-1}$, $J_0(z)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(z/2)^{2k}/\big(k!\Gamma(k+1)\big)$– функция Бесселя [2, с. 727] первого рода нулевого порядка.

Поскольку матрица A из (9) имеет различные собственные значения $\lambda_1=0$, $\lambda_{2,3}=\pm\sqrt{2}$, то она приводима к диагональному виду, то есть существует матрица T_A ($|T_A|\neq 0$) такая, что $T_A^{-1}AT_A=\Lambda_A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$, причем

$$T_A=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ 0 & 2 & 2\\ -1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{pmatrix},\ T_A^{-1}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2\sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2}\\ 1 & \sqrt{2} & 1\\ -1 & \sqrt{2} & -1\end{pmatrix}.$$

Значит, $J_0(i\sqrt{A}t)=J_0\Big(i\sqrt{T_A\Lambda_AT_A^{-1}}t\Big)=$

$$=T_AJ_0(i\sqrt{\Lambda_A}t)\,T_A^{-1}=T_A\begin{pmatrix}J_0(i\sqrt{\lambda_1}t) & 0 & 0\\ 0 & J_0(i\sqrt{\lambda_2}t) & 0\\ 0 & 0 & J_0(i\sqrt{\lambda_3}t)\end{pmatrix}T_A^{-1}=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2\sqrt{2}+\sqrt{2}\gamma_2(t) & 2\gamma_1(t) & -2\sqrt{2}+\sqrt{2}\gamma_2(t)\\ 2\gamma_1(t) & 2\sqrt{2}\gamma_2(t) & 2\gamma_1(t)\\ -2\sqrt{2}+\sqrt{2}\gamma_2(t) & 2\gamma_1(t) & 2\sqrt{2}+\sqrt{2}\gamma_2(t)\end{pmatrix}, \tag{12}$$

где

$$\gamma_n(t)=J_0(i\sqrt{\lambda_2}t)+(-1)^nJ_0(i\sqrt{\lambda_3}t)\ (n=1,2). \tag{13}$$

Поэтому из равенства (11) в силу (12), (13) и возвращения к старым переменным по формулам (10) найдем общее решение уравнения (1) в форме

$$u_k^{\pm}(\alpha_2^k(x),y)=\lambda_2^{(1-(-1)^k)/2}\int\limits_0^{z_0^{\pm}}\Phi_1^{\pm}(t)J_0\Big(i\sqrt{\lambda_2\bar{z}_0^{\pm}(z_0^{\pm}-t)}\Big)dt+$$

$$+\lambda_2^{(1-(-1)^k)/2}\int\limits_0^{\bar{z}_0^{\pm}}\Phi_2^{\pm}(t)J_0\Big(i\sqrt{\lambda_2z_0^{\pm}(\overline{z}_0^{\pm}-t)}\Big)dt, (x,t)\in D_0^{\pm}\ (k=0,1,2), \tag{14}$$

где $\Phi_1^{\pm}(t)$, $\Phi_2^{\pm}(t)$– произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции,

$$z_0^+=x+iy,\ \bar{z}_0^+=x-iy;\ z_0^-=x+y,\ \bar{z}_0^-=x-y,$$

причем

$$\alpha_2^0(x)=x,\ \alpha_2^1(x)=\alpha_2(x)=\sqrt{x^2+\tau^2},\ \alpha_2^2(x)=\alpha_2(\alpha_2(x))=\sqrt{x^2+2\tau^2}$$

и

$$\begin{gathered}u_k^{\pm}(\sqrt{k+1}\tau-0,y)=u_{k+1}^{\pm}(\sqrt{k+1}\tau+0,y)=0,\ 0\leqslant y\leqslant h;\\ \frac{\partial}{\partial x}\big(u_k^{\pm}(\sqrt{k+1}\tau-0,y)\big)\neq\frac{\partial}{\partial x}\big(u_{k+1}^{\pm}(\sqrt{k+1}\tau+0,y)\big),\ 0<y<h\ (k=0,1).\end{gathered} \tag{15}$$

Для равенства (14), которое [1, с. 69] после интегрирования по частям и соответствующих замен, можно записать в виде

$$u_k^{\pm}(\alpha_2^k(x),y)=M_0^{\pm}(x,y)-\int\limits_0^1 M_0^{\pm}(xt,yt)\frac{\partial}{\partial t}J_0(i\sqrt{\lambda_2(x^2\pm y^2)(1-t)})dt, \qquad (16)$$

имеет место формула обращения

$$M_0^{\pm}(x,y)=u_k^{\pm}(\alpha_2^k(x),y)+\frac{i\sqrt{x^2\pm y^2}}{2}\int\limits_0^1\frac{u_k^{\pm}(\alpha_2^k(xt),yt)}{\sqrt{t(1-t)}}I_1(i\sqrt{\lambda_2(x^2\pm y^2)t(1-t)})dt, \qquad (17)$$

где

$$M_0^{\pm}(x,y)=\int\limits_0^{z_0^{\pm}}\Phi_1^{\pm}(r)dr+\int\limits_0^{\bar z_0^{\pm}}\Phi_2^{\pm}(r)dr,\ (x,y)\in D_0^{\pm}, \qquad (18)$$

а $I_1(s)=\dfrac{d}{ds}I_0$, $I_0(s)$, $I_1(s)-$ модифицированные функции Бесселя [2, с. 730] первого рода нулевого порядка.

В случае $y=0$ выражения (16), (17) после преобразований представимы [3] равенствами

$$u_k^{\pm}(\alpha_2^k(x),0)=M_0^{\pm}(x,0)-\int\limits_0^x M_0^{\pm}(t,0)\frac{\partial}{\partial t}J_0(i\sqrt{\lambda_2 x(x-t)})dt,\ 0<x<\tau, \qquad (19)$$

$$M_0^{\pm}(x,0)=u_k^{\pm}(\alpha_2^k(x),0)+\int\limits_0^x u_k^{\pm}(\alpha_2^k(t),0)\frac{x}{t}\frac{\partial}{\partial t}I_0(i\sqrt{\lambda_2 t(x-t)})dt,\ 0<x<\tau. \qquad (20)$$

Теорема 1. *Если* $\varphi(x)\in C[\sqrt{k}\tau,\sqrt{k+1}\tau]\cap\ C^2(\sqrt{k}\tau,\sqrt{k+1}\tau)(k\ =\ 0,1,2)$, $\psi_k(x)\in C[\sqrt{k}\tau,(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})\tau/2]\cap C^2(\sqrt{k}\tau,(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})\tau/2)(k\ =\ 0,2)$, $\psi_1\in C[(1+\sqrt{2})\tau/2,\sqrt{2}\tau]\cap C^2((1+\sqrt{2})\tau/2,\sqrt{2}\tau)$, *абсолютно интегрируемы на своих промежутках;* $\varphi(0)=\varphi(\sqrt{3}\tau)=\psi_0(0)=0$, $\psi_1(\sqrt{2}\tau)=\psi_2(\sqrt{2}\tau)$ *и* $\psi_k'(x)$ *при* $x\to\sqrt{k}\tau$ $(k=0,2)$, $\psi_1'(x)$ *при* $x\to\sqrt{2}\tau$ *допускают интегрируемую особенность, то сущетсвует единственное решение* $u(x,y)$ *задачи* G.

Единственность решения задачи G следует из утверждений:

Лемма 1. *Если* $u(x,y)-$ *решение уравнения (1) в области* $D^-=\bigcup\limits_{k=0}^{2}D_k^-$ *из класса* $C(\overline{D^-})\cap C^2(D^-)$, *обращающееся в нуль на характеристиках*

$$y=\sqrt{k}\tau-x,\ \sqrt{k}\tau<x<(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})\tau/2\ (k=0,2),\ y=x-\sqrt{2}\tau,\ (1+\sqrt{2})\tau/2<x<\sqrt{2}\tau,$$

то

$$\beta=\int\limits_0^{\sqrt{3}\tau}\omega(x)\nu(x)dx\geqslant 0.$$

Доказательство леммы аналогично приведенному в [4, с. 128-130] (по схеме [5, с. 491-493]).

Лемма 2. *Если $u(x,y)$ – решение уравнения (1) в области D^+ из класса $C(\overline{D}^+)\cap C^2(D^+\setminus J)$, обращающееся в нуль при $x=\sqrt{k}\tau$ $(0\leqslant y\leqslant h)$ $(k=0,1,2,3$; в силу (2) и (15)), $y=h$ $(0\leqslant x\leqslant \sqrt{3}\tau)$, то $\beta\leqslant 0$ и*

$$\beta+\iint\limits_{D^+}[u_x^2(x,y)+u_y^2(x,y)+\gamma^2(x,y)]dxdy=0, \tag{21}$$

где

$$\gamma^2(x,y)=\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-\tau^2}}\right)H(x-\tau)u(x,y)u(\sqrt{x^2-\tau^2},y)\geqslant 0.$$

Доказательство получим из тождества

$$u(x,y)\big[Lu(x,y)-H(x-\tau)u(\sqrt{x^2-\tau^2},y)-H(\sqrt{2}\tau-x)u(\sqrt{x^2+\tau^2},y)\big]=$$
$$=\big(u(x,y)u_x(x,y)\big)_x+\big(u(x,y)u_y(x,y)\big)_y-u_x^2(x,y)-u_y^2(x,y)-$$
$$-H(x-\tau)u(x,y)u(\sqrt{x^2-\tau^2},y)-H(\sqrt{2}\tau-x)u(x,y)u(\sqrt{x^2+\tau^2},y)=0,$$

интегрируя которое по области

$$D_\varepsilon^+=\big\{(x,y):\ 0<x<\sqrt{3}\tau,\ \varepsilon<y<h\big\}\ (0<\varepsilon=const),$$

применяя формулу Грина [6, с. 541] и условия леммы, в пределе при $\varepsilon\to 0$, в силу равенства

$$\iint\limits_{D_\varepsilon^+}H(\sqrt{2}\tau-x)u(x,y)u(\sqrt{x^2+\tau^2},y)dxdy=$$
$$=\iint\limits_{D_\varepsilon^+}H(x-\tau)u(\sqrt{x^2-\tau^2},y)u(x,y)\frac{x}{\sqrt{x^2-\tau^2}}dxdy,$$

будем иметь (21) и

$$\gamma^2(x,y)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-\tau^2}}\right)H(x-\tau)\Big[u^2(x,y)+u^2(\sqrt{x^2-\tau^2},y)-$$
$$-\big(u(x,y)-u(\sqrt{x^2-\tau^2},y)\big)^2\Big]\geqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-\tau^2}}\right)H(x-\tau)\Big[u^2(x,y)+$$
$$+\Big(\int\limits_{\sqrt{x^2-\tau^2}}^{\sqrt{3}\tau}|u_\xi(\xi,y)|d\xi\Big)^2-\Big(\int\limits_{\sqrt{x^2-\tau^2}}^{x}|u_\xi(\xi,y)|d\xi\Big)^2\Big]\geqslant 0.$$

Вопрос **существования решения** задачи G в области $D=D_0\cup D_1\cup D_2\cup J$ связан с построением в $D_k=D_k^+\cup D_k^-\cup I_k$ $(k=0,1,2)$ на основании общих решений (14) функций $u_k^\pm(x,y),\ (x,y)\in D_k^\pm$ $(k=0,1,2)$, удовлетворяющих условиям (2) – (7), (8), (15) в которых $\varphi(x),\ \psi_k(x)$ $(k=0,1,2)$ заданы, а $\omega(x),\ \nu(x)$ подлежат определению. Для этого достаточно решить задачу G для уравнения (1), например, в области $D_2=D_2^+\cup D_2^-\cup I_2$, то есть найти $u_2^\pm(\alpha_2^2(x),y),\ (x,y)\in D_0$ при условиях, согласно (2) – (7), (15):

$$u_2^+(\alpha_2^2(x),h)=\varphi(\alpha_2^2(x)),\ 0\leqslant x\leqslant\tau, \tag{22}$$

$$u_2^+(\alpha_2^2(0),y)=u_2^+(\alpha_2^2(\tau),y)=0,\ 0\leqslant y\leqslant h, \tag{23}$$

$$u_2^-(\alpha_2^2(x),-x)=\psi_2(\alpha_2^2(x)),\ 0<x<\tau/2, \tag{24}$$

$$u_2^-(\alpha_2^2(x),0-)=u_2^+(\alpha_2^2(x),0+)=\omega(\alpha_2^2(x)),\ 0\leqslant x\leqslant\tau, \tag{25}$$

$$u_{2y}^-(\alpha_2^2(x),0-)=u_{2y}^+(\alpha_2^2(x),0+)=\nu(\alpha_2^2(x)),\ 0<x<\tau, \tag{26}$$

$$\varphi(\alpha_2^2(0))=\varphi(\alpha_2^2(\tau)),\ \omega(\alpha_2^2(0))=\omega(\alpha_2^2(\tau))=\psi_2(\alpha_2^2(0))=0.$$

Задача Коши. *Найти в области D_2^- решение $u_2^-(x,y)$ уравнения (1) из класса $C(\overline{D_2^-})\cap C^2(D_2^-)$, удовлетворяющее условиям (25), (26), то есть*

$$u_2^-(\alpha_2^2(x),0-)=\omega(\alpha_2^2(x)), 0\leqslant x\leqslant\tau,$$

$$u_{2y}^-(\alpha_2^2(x),0-)=\nu(\alpha_2^2(x)), 0<x<\tau,$$

где $\omega(\alpha_2^2(x))$, $\nu(\alpha_2^2(x))$– непрерывные достаточно гладкие функции, причем $\omega(\alpha_2^2(0))=$ $=\omega(\alpha_2^2(\tau))=0$.

Теорема 2. *Если $\omega(\alpha_2^2(x))\in C[0,\tau]\cap C^2(0,\tau)$, $\nu(\alpha_2^2(x))\in C^1(0,\tau)$, $\omega(\alpha_2^2(0))=$ $=\omega(\alpha_2^2(\tau))=0$, то существует единственное решение задачи Коши $u_2^-(x,y)\in C(\overline{D_2^-})\cap$ $\cap\, C^2(D_2^-)$ вида*

$$u_2^-(\alpha_2^2(x),y)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{x+y}J_0(i\sqrt{\lambda_2(x-y)(x+y-t)})[p'(t)+r(t)]dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{x-y}J_0(i\sqrt{\lambda_2(x+y)(x-y-t)})[p'(t)-r(t)]dt,\ (x,y)\in D_0^- \tag{27}$$

или

$$u_2^-(x,y)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\alpha_1^2(x)+y}J_0(i\sqrt{\lambda_2(\alpha_1^2(x)-y)(\alpha_1^2(x)+y-t)})[p'(t)+r(t)]dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\alpha_1^2(x)-y}J_0(i\sqrt{\lambda_2(\alpha_1^2(x)+y)(\alpha_1^2(x)-y-t)})[p'(t)-r(t)]dt,\ (x,y)\in D_2^-,$$

где

$$p(x)=\omega(\alpha_2^2(x))+\int\limits_0^x\omega(\alpha_2^2(\xi))\frac{x}{\xi}\frac{\partial}{\partial x}I_0(i\sqrt{\lambda_2\xi(x-\xi)})d\xi, \tag{28}$$

$$r(x)=\nu(\alpha_2^2(x))+\int\limits_0^x\nu(\alpha_2^2(\xi))\frac{\partial}{\partial x}I_0(i\sqrt{\lambda_2\xi(x-\xi)})d\xi. \tag{29}$$

Доказательство следует из (14), аналогично [7].

Функциональное соотношение между $\omega(\alpha_2^2(x))$ и $\nu(\alpha_2^2(x))$, принесенное на линию изменения типа уравнения (1) $y=0,\ 0<x<\tau$, получим из (27), полагая $y=-x$ и учитывая условие (24) задачи G:

$$\psi_2(\alpha_2^2(x))=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2x}[p'(t)-r(t)]dt,\ 0<x<\tau/2,$$

или, после замены x на $x/2$ и дифференцирования,

$$p'(t) = r(x) + 2\big(\psi_2(\alpha_2^2(x/2))\big)', \ 0 < x < \tau. \tag{30}$$

Выражение (30) является искомым функциональным соотношением.

Задача Дирихле. *В области D_2^+ найти решение $u_2^+(x,y) \in C(\overline{D}_2^+) \cap C^2(D_2^+)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (22), (23), (25), то есть*

$$u_2^+(\alpha_2^2(x), h) = \varphi(\alpha_2^2(x)), \ 0 \leqslant x \leqslant \tau,$$

$$u_2^+(\alpha_2^2(0), y) = u_2^+(\alpha_2^2(\tau), y) = 0, \ 0 \leqslant y \leqslant h,$$
$$u_2^+(\alpha_2^2(x), 0+) = \omega(\alpha_2^2(x)), \ 0 \leqslant x \leqslant \tau,$$

где $\varphi(\alpha_2^2(x))$, $\omega(\alpha_2^2(x))$ − непрерывные достаточно гладкие функции, причем $\omega(\alpha_2^2(0)) = \omega(\alpha_2^2(\tau)) = \varphi(\alpha_2^2(0)) = \varphi(\alpha_2^2(\tau)) = 0$.

Теорема 3. *Если $\varphi(\alpha_2^2(x))$, $\omega(\alpha_2^2(x)) \in C[0,\tau] \cap C^2(0,\tau)$ и $\omega(\alpha_2^2(0)) = \omega(\alpha_2^2(\tau)) = \varphi(\alpha_2^2(0)) = \varphi(\alpha_2^2(\tau)) = 0$, то существует единственное решение $u_2^+(x,y) \in C(\overline{D_2^+}) \cap C^2(D_2^+)$ задачи Дирихле вида*

$$u_2^+(\alpha_2^2(x), y) = \int\limits_0^{x+iy} J_0(i\sqrt{\lambda_2(x-iy)(x+iy-t)})[p'(t) - \sum_{k=0}^{+\infty} R_t^{2ikh}(p'(t) - R_t^{ih}\beta'(t))]dt +$$

$$+ \int\limits_0^{x-iy} J_0(i\sqrt{\lambda_2(x+iy)(x-iy-t)})\left[\sum_{k=0}^{+\infty} R_t^{2ikh}(p'(t) - R_t^{ih}\beta'(t))\right]dt, \ (x,y) \in D_0^+ \tag{31}$$

или

$$u_2^+(x,y) = \int\limits_0^{\alpha_1^2(x)+iy} J_0(i\sqrt{\lambda_2(\alpha_1^2(x)-iy)(\alpha_1^2(x)+iy-t)})[p'(t) - \sum_{k=0}^{+\infty} R_t^{2ikh}(p'(t) - R_t^{ih}\beta'(t))]dt +$$

$$+ \int\limits_0^{\alpha_1^2(x)-iy} J_0(i\sqrt{\lambda_2(\alpha_1^2(x)+iy)(\alpha_1^2(x)-iy-t)})\left[\sum_{k=0}^{+\infty} R_t^{2ikh}(p'(t) - R_t^{ih}\beta'(t))\right]dt, \ (x,y) \in D_2^+,$$

где

$$\beta(x) = \varphi(\alpha_2^2(x)) + \frac{i\sqrt{x^2+h^2}}{2} \int\limits_0^1 \frac{\varphi(\alpha_2^2(xt))}{\sqrt{t(1-t)}} I_1(i\sqrt{\lambda_2(x^2+h^2)(1-t)})dt, \tag{32}$$

а $p(x)$ определяется равенством (28).

Доказательство следует из (14), аналогично [7].

Найдем **функциональное соотношение** между $\omega(\alpha_2^2(x))$ и $\nu(\alpha_2^2(x))$, принесенное на линию $y = 0, \ 0 < x < \tau$.

Подставляя в равенство (14) (или (16), (19)) условие (26), получаем уравнение

$$\nu(\alpha_2^2(x)) = M_{0y}^+(x,0) - \int\limits_0^x M_{0y}^+(t,0)\frac{t}{x}\frac{\partial}{\partial t} J_0(i\sqrt{\lambda_2 x(x-t)})dt, \ 0 < x < \tau,$$

обращая которое относительно $M_{0y}^{+}(x,0)$ аналогично (19), (20), в силу (18), придем к равенству

$$r(x) = ip'(x) - 2i\sum_{k=0}^{+\infty} R_x^{2ikh}p'(x) + 2i\sum_{k=0}^{+\infty} R_x^{ih(2k+1)}\beta'(x),$$

представимому в виде

$$(1 - R_x^{2ih})r(x) = -i(1 + R_x^{2ih})p'(x) + 2iR_x^{ih}\beta'(x),\ 0 < x < \tau. \tag{33}$$

Выражение (33) является искомым функциональным соотношением.

Вопрос **существования решения** задачи G в области $D_2 = D_2^+ \cup D_2^- \cup I_2$ сводится к разрешимости системы функциональных соотношений (30), (33), то есть к разностному уравнению

$$(1 + iR_x^{2ih})r(x) = \rho(x) \equiv -(i+1)(1 + R_x^{2ih})(\psi_2(\alpha_2^2(x/2)))' + (i+1)R_x^{ih}\beta'(x),\ 0 < x < \tau. \tag{34}$$

Решение разностного уравнения (34) можно записать [8] в виде

$$r(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-i)^n R_x^{2ihn}\rho(x) \equiv$$

$$\equiv -(i+1)\sum_{n=0}^{+\infty}(-i)^n R_x^{2ihn}(1 + R_x^{2ih})(\psi_2(\alpha_2^2(x/2)))' + (i+1)\sum_{n=0}^{+\infty}(-i)^n R_x^{ih(2n+1)}\beta'(x) = \tag{35}$$

$$= (i-1)(\psi_2(\alpha_2^2(x/2)))' - 2i\sum_{n=0}^{+\infty}(-i)^n R_x^{2ihn}(\psi_2(\alpha_2^2(x/2)))' + (i+1)\sum_{n=0}^{+\infty}(-i)^n R_x^{ih(2n+1)}\beta'(x) =$$

$$= -(\psi_2(\alpha_2^2(x/2)))' + \int_0^\tau (\psi_2(\alpha_2^2(\xi/2)))'G_1(x,\xi)d\xi + \int_0^\tau \beta'(\xi)G_2(x,\xi)d\xi,\ 0 < x < \tau,$$

где

$$G_1(x,\xi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}ln\frac{\gamma^-(x,\xi;4nh)\gamma^+(x,\xi;4nh)}{\gamma^-(x,\xi;4(n+1)h)\gamma^+(x,\xi;4(n+1)h)} -$$
$$-\frac{1}{2n+1}\Big(\frac{\partial}{\partial y}ln\frac{\gamma^-(x,\xi;2(2n+1)y)}{\gamma^+(x,\xi;2(2n+1)y)}\Big)\Big|_{y=h}\Big],$$

$$G_2(x,\xi) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}ln\frac{\gamma^-(x,\xi;(4n+1)h)\gamma^+(x,\xi;(4n+1)h)}{\gamma^-(x,\xi;(4n+3)h)\gamma^+(x,\xi;(4n+3)h)} -$$
$$-\Big(\frac{1}{4n+1}\frac{\partial}{\partial y}ln\frac{\gamma^-(x,\xi;(4n+1)y)}{\gamma^+(x,\xi;(4n+1)y)} + \frac{1}{4n+3}\frac{\partial}{\partial y}ln\frac{\gamma^-(x,\xi;(4n+3)y)}{\gamma^+(x,\xi;(4n+3)y)}\Big)\Big|_{y=h}\Big],$$

когда $\gamma^{\pm}(x,\xi;(4n+b)y) = cos(\pi(\xi \pm x)\tau) - ch(\pi(4n+b)y/\tau)$, поскольку любая [9, с. 7] финитная на промежутке $[0,\tau]$ непрерывная функция

$$f(x) = (f(\xi), \delta(\xi - x) - \delta(\xi + x)) = \int_0^\tau f(\xi)[\delta(\xi - x) - \delta(\xi + x)]d\xi,$$

где $\delta(z) = \dfrac{1}{2\tau}\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda_m z}$– дельта-функция Дирака [6, с. 711-714], $\lambda_m = \dfrac{m\pi}{\tau}$, и поэтому

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-i)^n R_x^{2ihn} f(x) =$$

$$= \frac{1}{2\tau}\int\limits_0^\tau f(\xi)\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left(e^{i\lambda_m(\xi-x)} - e^{-i\lambda_m(\xi+x)}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}(-i)^n e^{-2\lambda_m hn} d\xi =$$

$$= \frac{1}{4\tau}\int\limits_0^\tau f(\xi)\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left(e^{i\lambda_m(\xi-x)} - e^{-i\lambda_m(\xi+x)}\right)\left(1 + th(2\lambda_m h) - \frac{i}{ch(2\lambda_m h)}\right)d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}f(x) + \frac{i}{2\tau}\int\limits_0^\tau f(\xi)\sum_{m=1}^{+\infty}(sin(\lambda_m(\xi - x)) + sin(\lambda_m(\xi + x)))th(2\lambda_m h)d\xi -$$

$$- \frac{i}{2\tau}\int\limits_0^\tau f(\xi)\sum_{m=1}^{+\infty}(cos(\lambda_m(\xi - x)) - cos(\lambda_m(\xi + x)))\frac{d\xi}{ch(2\lambda_m h)} =$$

$$= \frac{1}{2}f(x) + \frac{i}{2\tau}\int\limits_0^\tau f(\xi)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\sum_{m=1}^{+\infty}\big(sin(\lambda_m(\xi - x)) + sin(\lambda_m(\xi + x))\big)\big(e^{-4\lambda_m hn} - e^{-4\lambda_m h(n+1)}\big)d\xi -$$

$$- \frac{i}{\tau}\int\limits_0^\tau f(\xi)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\sum_{m=1}^{+\infty}\big(cos(\lambda_m(\xi - x)) - cos(\lambda_m(\xi + x))\big)e^{-2\lambda_m h(2n+1)}d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}f(x) + \frac{i}{2}\int\limits_0^\tau f(\xi)G_1(x,\xi)d\xi,$$

где последнее равенство вытекает из формул 5.4.12.1-2 [10]; аналогично предыдущему,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-i)^n R_x^{ih(2n+1)} f(x) = \frac{1-i}{2}\int\limits_0^\tau f(\xi)G_2(x,\xi)d\xi.$$

Таким образом, учитывая (35) в (29), применяя формулы взаимного обращения (19), (20), получим

$$\nu(\alpha_2^2(x)) = r(x) - \int\limits_0^x r(t)\frac{t}{x}\frac{\partial}{\partial t}J_0(i\sqrt{\lambda_2 x(x-t)})dt,\ 0 < x < \tau. \qquad (36)$$

На основании свойств функций $\varphi(\alpha_2^2(x))$, $\psi_2(\alpha_2^2(x))$, входящих в (32), (35), из (36) следует, что $\nu(\alpha_2^2(x)) \in C^1(0,\tau)$.

Очевидно, интегрируя (30), подставляя $p(x)$, $r(x)$ из (28), (35), применяя формулы взаимного обращения (19), (20) найдем $\omega(\alpha_2^2(x)) \in C[0,\tau] \cap C^2(0,\tau)$.

Подстановка функций $\omega(\alpha_2^2(x))$ и $\nu(\alpha_2^2(x))$ в формулы (27), (31) приводит у окончательному виду решения задачи Коши и задачи Дирихле в областях D_2^- и D_2^+, то есть в области $D_2 = D_2^+ \cup D_2^- \cup I_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Векуа И.Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. М.-Л., 1948.
2. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Итегралы и ряды. Специальные функции. М., 1983.
3. *Векуа И.Н.* Обращение одного интегрального преобразования и его некоторые приложения // Сообщения АН ГрузССР. 1945. Т. 6, № 3. С. 177-183.
4. *Зарубин А.Н.* Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом. Орел, 1997.
5. *Франкль Ф.И.* Избранные труды по газовой динамике. М., 1973.
6. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. М., 1988.
7. *Зарубин А.Н.* Задача Трикоми для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа с замкнутой линией вырождения // Диффер. уравнения. 2015. Т. 51, № 10. С. 1315-1327.
8. *Зарубин А.Н.* Краевая задача для уравнения смешанного типа с опережающе-запаздывающим аргументом // Диффер. уравнения. 2012. Т. 48, № 10. С. 1404-1411.
9. *Агранович М.С.* Обобщенные функции. М., 2008.
10. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., 1981.

ABSTRACT

We study the Gellerstedt problem for a mixed type equation with the Lavrent?ev-Bitsadze operator in the main part and a variable deviation of the argument. The equation general solution has been built up. Uniqueness theorem is proved without any restrictions on the amount of deviation. We have found explicitly integral representations of solutions in the domains of ellipticity and hyperbolicity.

Keywords. Mixed type equation, Cauchy problem, Dirichlet problem, differential equation, the Gellerstedt problem.

Orel State University, Orel; lena260581@yandex.ru, aleks_zarubin@mail.ru

АННОТАЦИЯ

Исследуется задача Геллерстедта для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе в главной части и переменным отклонением аргумента. Построено общее решение уравнения. Доказана теорема единственности без ограничения на величину отклонения. Найдены в явной форме интегральные представления решений в области эллиптичности и гиперболичности.

Ключевые слова. Уравнение смешанного типа, задача Коши, задача Дирихле, разностное уравнение, задача Геллерстедта.

ФГБОУ ВО "Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева", г. Орел; lena260581@yandex.ru, aleks_zarubin@mail.ru