МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.956.32
DOI: 10.47928/1726-9946-2023-23-1-11-19
EDN: ACKBLJ

Научная статья

Внутреннекраевая задача со смещением для смешанно-гиперболического уравнения второго порядка

Ж. А. Балкизов
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН
г. Нальчик, Россия
Giraslan@yandex.ru

Аннотация. В работе исследована нелокальная задача со смещением на сопряжение двух уравнений гиперболического типа второго порядка, состоящего из волнового уравнения в одной части области и вырождающегося гиперболического уравнения первого рода в другой части. С использованием метода Трикоми найдены достаточные условия на заданные функции, обеспечивающие существование единственного регулярного в рассматриваемой области решения исследуемой задачи. В частном случае решение задачи выписано в явном виде.

Ключевые слова: волновое уравнение, вырождающееся гиперболическое уравнение, уравнение Вольтерра, метод Трикоми, метод интегральных уравнений, методы теории дробного исчисления

Благодарности: автор выражает благодарность рецензентам за указанные замечания, которые позволили повысить качество статьи.

Для цитирования. *Балкизов Ж. А.* Внутреннекраевая задача со смещением для смешанно-гиперболического уравнения второго порядка// Доклады АМАН. 2023. Т. 23, № 1. С. 11–19. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2023-23-1-11-9; EDN: ACKBLJ

© Балкизов Ж. А., 2023

MSC 35M12

Original article

Boundary value problems with data on opposite characteristics for a second-order mixed-hyperbolic equation

Giraslan A. Balkizov
Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik, Russia
Giraslan@yandex.ru

Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Abstract. In this paper, we study a nonlocal problem with a shift to conjugation of two equations of second-order hyperbolic type, consisting of a wave equation in one part of the domain and a degenerate hyperbolic equation of the first kind in the other part. Using the Tricomi method, sufficient conditions are found for given functions that ensure the existence of a unique solution of the problem under study that is regular in the region under consideration. In a particular case, the solution of the problem is written out explicitly.

Keywords: wave equation, degenerate hyperbolic equation, Volterra equation, Tricomi method, method of integral equations, methods of the theory of fractional calculus

Acknowledgments: the author are thankful to the anonymous reviewer for his valuable remakes.

For citation. *Balkizov G. A.* Boundary value problems with data on opposite characteristics for a second-order mixed-hyperbolic equation. Adyghe Int. Sci. J. 2023. Vol. 23, No. 1. P. 11–19.
DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2023-23-1-11-19; EDN: ACKBLJ

© Balkizov G. A., 2023

Введение. Постановка задачи.

На евклидовой плоскости точек $(x,\ y)$ рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} (-y)^m u_{xx} - u_{yy} + \lambda(-y)^{\frac{m-2}{2}} u_x, & y < 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + f, & y > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где m, $\lambda-$ заданные числа, причем $m > 0$, $|\lambda| \leq \frac{m}{2}$; $f = f\,(x, y) -$ заданная функция; $u = u\,(x, y) -$ искомая функция.

Уравнение (1) при $y < 0$ совпадает с уравнением

$$(-y)^m u_{xx} - u_{yy} + \lambda(-y)^{\frac{m-2}{2}} u_x = 0, \tag{2}$$

а при $y > 0$ уравнение (1) является неоднородным волновым уравнением

$$u_{xx} - u_{yy} + f(x, y) = 0. \tag{3}$$

Уравнение (2) относится к классу вырождающихся гиперболических уравнений первого рода [1, с. 21]. Важным свойством уравнения (2) является тот факт, что при $|\lambda| \leq \frac{m}{2}$ для него корректна задача Коши в обычной постановке с данными на линии параболического вырождения $y = 0$, несмотря на то, что нарушено условие Проттера [2]. При $m = 2$ уравнение (2) переходит в уравнение Бицадзе-Лыкова [3, с. 37], [4], [5, с. 234], а при $\lambda = 0$ из уравнения (2) приходим к уравнению Геллерстедта, которое, как показано в монографии [6, с. 234], находит применение в задаче определения формы прорези плотины. Частным случаем уравнения (2) также является уравнение Трикоми, который находит свои применения в теории околозвуковой газовой динамики и аэродинамики [7, с. 38], [8, с. 280] [9, с. 373].

Уравнение (1) рассматривается в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup I$, где Ω_1- это область, ограниченная характеристиками $\sigma_1 = AC : \ x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 0$ и $\sigma_2 = CB : \ x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = r$ уравнения (2), выходящими из точки $C = (r/2, y_C)$,

$y_C = -\left[\frac{r(m+2)}{4}\right]^{\frac{2}{m+2}}$, проходящими через точки $A = (0,0)$ и $B = (r,0)$, соответственно, и отрезком $I = AB$ прямой $y = 0$; Ω_2- область, ограниченная характеристиками $\sigma_3 = AD : x - y = 0$, $\sigma_4 = BD : x + y = r$ уравнения (3), выходящими из точек A и B, пересекающимися в точке $D = \left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right)$ и отрезком $I = AB$.

Регулярным в области Ω *решением* уравнения (1) назовем функцию $u = u\,(x,\,y)$ из класса $u\,(x,y) \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^1\,(\Omega) \cap C^2\,(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, при подстановке которой уравнение (1) обращается в тождество.

Задача 1. *Найти регулярное в области* Ω *решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u\left[\theta_1\,(x)\right] = \psi_1(x), \qquad 0 \le x \le r, \tag{4}$$

$$\alpha_1(x)x^{1-\beta_2}D_{0x}^{\beta_1}\left\{t^{\beta-1}u\left[\theta_0(t)\right]\right\} + \alpha_2(x)D_{0x}^{\beta-1}u_y(t,0) + \alpha_3(x)u(x,0) = \psi_2(x), \quad 0 < x < r, \tag{5}$$

где $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\alpha_3(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)-$ *заданные на отрезке* $[0,r]$ *функции, причем* $\alpha_1^2(x) + \alpha_2^2(x) + \alpha_3^2(x) \neq 0\ \forall\ x \in [0,r]$.

Здесь $\theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}, -(2-2\beta)^{\beta-1}x^{1-\beta}\right)$, $\theta_1(x) = \left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right)$ - аффиксы точек пересечения характеристик, выходящих из точки $(x,0)$ с характеристиками AC и AD уравнений 2) и 3) соответственно; $\beta_1 = \frac{m-2\lambda}{2(m+2)}$, $\beta_2 = \frac{m+2\lambda}{2(m+2)}$, $\beta = \beta_1 + \beta_2 = \frac{m}{m+2}$;

$$D_{cx}^{\gamma}\varphi(t) = \begin{cases} \frac{sgn(x-c)}{\Gamma(-\gamma)}\int\limits_c^x \frac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^{1+\gamma}}, & \gamma < 0, \\ sgn^{[\gamma]+1}(x-c)\frac{d^{[\gamma]+1}}{dx^{[\gamma]+1}}D_{cx}^{\gamma-[\gamma]-1}\varphi(t), & \gamma > 0, \end{cases} -$$

оператор дробного (в смысле Римана-Лиувилля) интегро-дифференцирования порядка $|\gamma|$, где $[\gamma]-$ есть целая часть числа γ [5, с. 28], [11].

Задача Гурса для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения ранее исследована в работах [12], [13]. В работе [12] исследован критерий непрерывности решения задачи Гурса для уравнения вида (2), а в [13] решение задачи Гурса для вырождающегося внутри области модельного уравнения выписано в явном виде. В работе [14] рассмотрена первая краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения. Краевые задачи для вырождающихся гиперболических уравнений в характеристическом четырехугольнике с данными на противоположных характеристиках исследованы в работах [15], [16], [17]. Задачи со смещением для вырождающихся внутри области гиперболических уравнений были изучены в работах [18], [19], [20], [21]. Задачи со смещением для вырождающегося гиперболического уравнения первого рода вида (2), как обобщения первой и второй задач Дарбу исследованы в работе [22]. В рамках данной работы для уравнения (1) изучена нелокальная *задача 1* , которая относится к классу краевых задач со смещением Жегалова-Нахушева [23], [24], [25], [26] и являются обобщениями задачи Гурса и задач с данными на противоположных характеристиках для уравнения вида (1). Найдены достаточные условия на заданные функции $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\alpha_3(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ и $f(x,y)$, при котором существует единственное регулярное в рассматриваемой области решение *задачи 1*. В некоторых частных случаях решение *задачи 1* выписано в явном виде.

Исследование задачи 1

Пусть

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta_2)}, \quad \gamma_2 = \frac{(2-2\beta)^{\beta-1}\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(1-\beta_1)}.$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть заданные функции $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\alpha_3(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $f(x,y)$ таковы, что*

$$\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x) \in C^1[0,r] \cap C^2(0,r), \tag{6}$$

$$\psi_1(x), \psi_2(x) \in C[0,r] \cap C^2(0,r), \tag{7}$$

$$f(x,y) \in C^1(\overline{\Omega_2}), \tag{8}$$

и выполнено одно из условий: либо

$$\alpha_2(x) - \gamma_2\alpha_1(x) \neq 0 \ \ \forall\ x \in [0,r]; \tag{9}$$

либо же

$$\alpha_2(x) - \gamma_2\alpha_1(x) \equiv 0,\ \alpha_3(x) + \gamma_1\alpha_1(x) \neq 0 \ \ \forall\ x \in [0,r]. \tag{10}$$

Тогда существует единственное регулярное в области Ω решение задачи 1.
Доказательство. Пусть существует решение задачи (1), (4), (5) и пусть

$$u\,(x,0) = \tau\,(x)\,,\ 0 \le x \le r, \tag{11}$$

$$u_y\,(x,0) = \nu\,(x)\,,\ 0 < x < r. \tag{12}$$

Найдем фундаментальные соотношения между искомыми функциями $\tau\,(x)$ и $\nu\,(x)$, принесенные из соответствующих частей Ω_1 и Ω_2 области Ω на линию $y = 0$.

Регулярное в области Ω_1 решение задачи (11), (12) для уравнения (2) при $|\lambda| \le \frac{m}{2}$ дается по одной из следующих формул [27, с. 14]:

$$u\,(x,\,y) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma\,(\beta_1)\ \Gamma\,(\beta_2)} \int\limits_0^1 \tau\left[x + (1-\beta)\,(-y)^{\frac{1}{1-\beta}}\,(2t-1)\right] t^{\beta_2 - 1}\ (1-t)^{\beta_1 - 1}\,dt +$$

$$+\frac{\Gamma\,(2-\beta)\ y}{\Gamma\,(1-\beta_1)\ \Gamma\,(1-\beta_2)} \int\limits_0^1 \nu\left[x + (1-\beta)\,(-y)^{\frac{1}{1-\beta}}\,(2t-1)\right] t^{-\beta_1}\ (1-t)^{-\beta_2}\,dt, \quad |\lambda| < \frac{m}{2} \tag{13}$$

$$u\,(x,y) = \tau\left(x - \frac{2}{m+2}\,(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right) +$$

$$+\frac{2y}{m+2}\int\limits_0^1 \nu\left[x - \frac{2}{m+2}\,(-y)^{\frac{m+2}{2}}\,(2t-1)\right]\ (1-t)^{-\frac{m}{m+2}}\ dt,\ \ \lambda = -\frac{m}{2}; \tag{14}$$

$$u\,(x,\,y) = \tau\left(x + \frac{2}{m+2}\,(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right) +$$

$$+\frac{2y}{m+2}\int\limits_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{m+2}\,(-y)^{\frac{m+2}{2}}\,(2t-1)\right]\ (1-t)^{-\frac{m}{m+2}}\,dt,\ \ \lambda = \frac{m}{2}, \tag{15}$$

где $\tau(x) \in C[0,r] \cap C^2(0,r)$, $\nu(x) \in C^1(0,r) \cap L_1[0,r]$; $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty \exp(-t)t^{x-1}dt$ – интеграл Эйлера первого рода.

Рассмотрим сначала случай, когда $|\lambda| < \frac{m}{2}$. В этом случае из формулы (13) находим

$$u[\theta_0(x)] = u\left(\frac{x}{2}, -(2-2\beta)^{\beta-1}x^{1-\beta}\right) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta_1)\,\Gamma(\beta_2)}\int\limits_0^1 \tau(xt)\,t^{\beta_2-1}\,(1-t)^{\beta_1-1}\,dt-$$

$$-\frac{\Gamma(2-\beta)\,(2-2\beta)^{\beta-1}x^{1-\beta}}{\Gamma(1-\beta_1)\,\Gamma(\beta_2)}\int\limits_0^1 \nu(xt)\,t^{-\beta_1}\,(1-t)^{-\beta_2}\,dt.$$

Вводя новую переменную интегрирования $z = xt$, последнее равенство перепишется в виде

$$u\left[\theta_0(x)\right] = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta_1)\,\Gamma(\beta_2)}x^{1-\beta}\int\limits_0^x \frac{\tau(z)\,z^{\beta_2-1}}{(x-z)^{1-\beta_1}}dz-$$

$$-\frac{\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(1-\beta_1)\,\Gamma(1-\beta_2)}(2-2\beta)^{\beta-1}\int\limits_0^x \frac{z^{-\beta_1}\nu(z)}{(x-z)^{\beta_2}}dz.$$

В терминах оператора $D_{cx}^{\gamma}\varphi(t)$ дробного (в смысле Римана-Лиувилля) интегро-дифференцирования последнее равенство перепишется в виде:

$$u\left[\theta_0(x)\right] = \frac{\Gamma(\beta)\,x^{1-\beta}}{\Gamma(\beta_2)}D_{0x}^{-\beta_1}\left[t^{\beta_2-1}\tau(t)\right] - \frac{(2-2\beta)^{\beta-1}\,\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(1-\beta_1)}D_{0x}^{\beta_2-1}\left[t^{-\beta_1}\nu(t)\right]. \qquad (16)$$

Воспользуемся далее следующими законами взвешенной композиции операторов дробного дифференцирования и интегрирования с одинаковыми началами [6, с. 18], [11]

$$D_{cx}^{-\gamma}D_{ct}^{\gamma}\varphi(s) = \varphi(x), \qquad (17)$$

$$D_{cx}^{\alpha}|t-c|^{\alpha+\gamma}D_{ct}^{\gamma}\varphi(s) = |x-c|^{\gamma}D_{cx}^{\alpha+\gamma}|t-c|^{\alpha}\varphi(t), \qquad (18)$$

где $0 < \alpha \le 1$, $\gamma < 0$, $\alpha+\gamma > -1$; $\varphi(x) \in L_1[a,b]$, причем при $\alpha+\gamma > 0$ функция $\varphi(x)$ обладает производной дробного порядка $D_{cx}^{\alpha+\gamma}\varphi(t)$.

Разделив обе части равенства (16) на $x^{1-\beta}$, а затем применяя к обеим частям полученного равенства оператор $D_{0x}^{\beta_1}$ и, пользуясь приведенными выше законами композиции (17), (18), находим

$$x^{1-\beta_2}D_{0x}^{\beta_1}\left\{t^{\beta-1}u\left[\theta_0(t)\right]\right\} = \gamma_1\tau(x) - \gamma_2 D_{0x}^{\beta-1}\nu(t). \qquad (19)$$

С учетом (19) условие (5) перепишется в следующем виде

$$\left[\alpha_3(x)+\gamma_1\alpha_1(x)\right]\tau(x) + \left[\alpha_2(x)-\gamma_2\alpha_1(x)\right]D_{0x}^{\beta-1}\nu(t) = \psi_2(x). \qquad (20)$$

Соотношение (20) есть фундаментальное соотношение между искомыми функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области Ω_1 на линию $y=0$ при $|\lambda| < \frac{m}{2}$. При $\lambda = -\frac{m}{2}$ из (14) при условии (5) вновь приходим к соотношению вида (20), но при $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \beta = \frac{m}{m+2}$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 2^{\beta-1}(1-\beta)^{\beta}$, а при $\lambda = \frac{m}{2}$ из (15) при условии (5) приходим к (20), где $\beta_1 = \beta = \frac{m}{m+2}$, $\beta_2 = 0$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = (2-2\beta)^{\beta-1}\Gamma(2-\beta)$

Найдем теперь фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области Ω_2 на линию $y=0$. Для этого воспользуемся следующим представлением регулярного в области Ω_2 решения задачи Коши (11), (12) для уравнения (3), которое выписывается по формуле Даламбера [28, с. 59]:

$$u\left(x,\,y\right)=\frac{\tau\left(x+y\right)+\tau\left(x-y\right)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\nu\left(t\right)dt+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{y}\int\limits_{x-y+t}^{x+y-t}f\left(s,t\right)dsdt, \tag{21}$$

где $\tau(x)\in C[0,r]\cap C^2(0,r)$, $\nu(x)\in C^1(0,r)\cap L_1(0,r)$.

Удовлетворяя (21) условию (4) будем иметь

$$u\left[\theta_1\left(x\right)\right]=u\left(\frac{x}{2},\frac{x}{2}\right)=\frac{\tau\left(x\right)+\tau\left(0\right)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}\nu\left(t\right)dt+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{x}{2}}\int\limits_{t}^{x-t}f\left(s,t\right)dsdt=\psi_1(x),$$

откуда

$$\tau(x)=2\psi_1(x)-\psi_1(0)-\int\limits_{0}^{x}\nu\left(t\right)dt-\int\limits_{0}^{\frac{x}{2}}\int\limits_{t}^{x-t}f\left(s,t\right)dsdt. \tag{22}$$

Соотношение (22) есть второе фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области Ω_2 на линию $I=AB$.

Исключая из (20) и (22) искомую функцию $\tau(x)$ относительно $\nu(x)$ приходим к уравнению вида

$$\int\limits_{0}^{x}K(x,t)\nu\left(t\right)dt=F(x), \tag{23}$$

где $K(x,t)=[\alpha_2(x)-\gamma_2\alpha_1(x)](x-t)^{-\beta}/\Gamma(1-\beta)-[\alpha_3(x)+\gamma_1\alpha_1(x)]$,
$F(x)=\psi_2(x)-[\alpha_3(x)+\gamma_1\alpha_1(x)]\left[2\psi_1(x)-\psi_1(0)-\int\limits_{0}^{\frac{x}{2}}\int\limits_{t}^{x-t}f\left(s,t\right)dsdt\right]$.

Из свойств (6), (7), (8) на заданные функции $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\alpha_3(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $f(x,y)$ следует, что уравнение (23) есть интегральное уравнение Вольтерра первого рода с ядром $K(x,t)\in L_1\left([0,r]\times[0,r]\right)$, имеющим слабую особенность при $x=t$ и правой частью $F(x)\in L_1[0,r]\cap C^1(0,r)$. Согласно общей теории интегральных уравнений Вольтерра первого рода со слабой особенностью, существует единственное решение $\nu(x)$ уравнения (23), принадлежащее тому же классу, что и правая часть $F(x)$, то есть классу $\nu(x)\in L_1[0,r]\cap C^1(0,r)$.

Если выполнено условие (9) и $[\alpha_3(x)+\gamma_1\alpha_1(x)]/[\alpha_2(x)-\gamma_2\alpha_1(x)]=\alpha=const$, то решение уравнения (23) выписывается по формуле [6, с. 93]:

$$\nu(x)=D_{0x}^{1-\beta}\left\{\frac{F(t)}{\alpha_2(t)-\gamma_2\alpha_1(t)}\right\}+$$

$$+\alpha\int\limits_{0}^{x}(x-t)^{\beta-1}E_{\beta^{-1}}\left[\alpha(x-t)^{\beta};\beta\right]D_{0t}^{1-\beta}\left\{\frac{F(s)}{\alpha_2(s)-\gamma_2\alpha_1(s)}\right\}dt,$$

где $E_\rho(z,\mu) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu+n\rho^{-1})}$ – есть функция типа Миттаг-Леффлера [10, с. 117], которая при $\mu = 1$ совпадает с функцией Миттаг-Леффлера $E_\rho(z,1) = E_{1/\rho}(z)$.

Если же выполнено условие (10) теоремы 1, то из системы (20), (22) сразу находим

$$\tau(x) = \frac{\psi_2(x)}{\alpha_3(x) + \gamma_1\alpha_1(x)},$$

$$\nu(x) = 2\psi_1'(x) - \left[\frac{\psi_2(x)}{\alpha_3(x) + \gamma_1\alpha_1(x)}\right]' - \int\limits_0^{\frac{x}{2}} f(x-t,t)dt.$$

После того как функция $\nu(x)$ найдена, вторую искомую функцию $\tau(x)$ можно найти из соотношений (20) или (22). Тогда решение исследуемой *задачи 1* в области Ω_1 дается по одной из формул (13), (14) или (15), а в области Ω_2 решение задачи (11), (12) для уравнения (3) выписывается по формуле (21).

Список использованных источников

1. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970. 296 с.
2. *Protter M. H.* The Cauchy problem for a hyperbolic second-order equation with data on the parabolic line. Canad. J. of Math. 1954. Vol. 6, No. 4. Pp. 542–553.
3. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 164 с.
4. *Лыков А. В.* Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло и массообмена // Инженерно-физический журнал. 1955. Т. 9, №3, С. 287–304.
5. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
6. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
7. *Берс Л.* Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: Иностр. лит-ра, 1961. 208 с.
8. *Франкль Ф. И.* Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973. 771 с.
9. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Иностранная литература, 1957. 444 с.
10. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной плоскости. М.: Наука, 1966. 672 с.
11. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
12. *Кальменов Т. Ш.* Критерий единственности решения задачи Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, №1. С. 178–181.
13. *Балкизов Ж. А.* Краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Известия Высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия Естественные науки. 2016. 1(189), С. 5–10.
14. *Балкизов Ж. А.* Первая краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Владикавказский математический журнал. 2016. Т. 18, №2. С. 19–30.
15. *Кумыкова С. К., Нахушева Ф. Б.* Об одной краевой задаче для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, №1. С. 50–65.
16. *Балкизов Ж. А.* Краевые задачи с данными на противоположных характеристиках для смешанно-гиперболического уравнения второго порядка // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2020. Т. 20, №3. С. 6–13.

17. *Балкизов Ж. А.* Краевые задачи для смешанно-гиперболического уравнения // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки. 2021. Т. 36, №1. С. 7–14.
18. *Салахитдинов М. С., Мирсабуров М.* О некоторых краевых задачах для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, №1. С. 129–136.
19. *Салахитдинов М. С., Мирсабуров М.* О двух нелокальных краевых задачах для вырождающегося гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 17, №1. С. 116–127.
20. *Ефимова С. В., Репин О. А.* Задача с нелокальными условиями на характеристиках для уравнения влагопереноса // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, №1. С. 116–127.
21. *Репин О. А.* О задаче с операторами М. Сайго на характеристиках для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико-математические науки. 2006. Т. 10, №43. С. 10–14.
22. *Балкизов Ж. А.* Задача со смещением для вырождающегося гиперболического уравнения первого рода // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико-математические науки. 2021. Т. 25, №1. С. 21–34.
23. *Жегалов В. И.* Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничным условием на обеих характеристиках с разрывами на переходной линии // Ученые записки Казанского государственного университета им. В. И. Ленина. 1962. Т. 122, №3. С. 3–16.
24. *Нахушев А. М.* О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, №1. С. 44–59.
25. *Нахушев А. М.* Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Доклады АН СССР. 1969. Т. 187, №4. С. 736–739.
26. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.
27. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся гиперболические уравнения. Минск: Вышейшая школа, 1977. 160 с.
28. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.

Поступила 17.03.2023; одобрена после рецензирования 21.03.2023; принята к публикации 23.03.2023.

Об авторе:

Балкизов Жираслан Анатольевич, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела Уравнений смешанного типа Института прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, (360017, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова 89 А), https://orcid.org/0000-0001-5329-7766, Giraslan@yandex.ru

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

References

1. *Smirnov M. M.* Mixed type equations. 1970. 296 p. [in Russian]
2. *Protter M. H.* The Cauchy problem for a hyperbolic second-order equation with data on the parabolic line. Canad. J. of Math. 1954. Vol. 6, No. 4. Pp. 542–553.
3. *Bitsadze A. V.* Mixed type equations, 1959. 164 p. [in Russian]
4. *Lykov A. V.* Application of methods of thermodynamics of irreversible processes to the study of heat and mass transfer. Inzhenerno-fizicheskij zhurnal. 1955. Vol. 9, No. 3. Pp. 287–304.
5. *Nakhushev A. M.* Equations of mathematical biology. 1995. 301 p. [in Russian]
6. *Nakhushev A. M.* Fractional calculus and its application. 2003. 272 p. [in Russian]

7. *Bers L.* Mathematical issues of subsonic and transonic gas dynamics. 1961. 208 p. [in Russian]
8. *Frankl F. I.* Selected works on gas dynamics. 1973. 771 p. [in Russian]
9. *Tricomi F.* Lectures on partial differential equations. 1957. 444 p. [in Russian]
10. *Dgrbashyan M. M.* Integral transformations and representations of functions in the complex plane. 1966. 672 p. [in Russian]
11. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional integrals and derivatives and some of their applications. 1987. 688 p. [in Russian]
12. *Kalmenov T. Sh.* A uniqueness criterion for a solution to the Darboux problem for a degenerate hyperbolic equation. Differ. equations. 1971. Vol. 7, No. 1. Pp. 178–181. [in Russian]
13. *Balkizov Zh. A.* Boundary-value problem for a hyperbolic equation degenerating inside a domain. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. North Caucasian region. Series Natural Sciences. 2016. No. 1(189). Pp. 5–10. [in Russian]
14. *Balkizov Zh. A.* The first boundary value problem for a hyperbolic equation degenerating inside a domain. Vladikavkaz Mathematical Journal. 2016. V. 18, No. 2, Pp. 19–30. [in Russian]
15. *Kumykova S. K., Nakhusheva F. B.* On a boundary value problem for a hyperbolic equation that degenerates inside a domain. Differ. equations. 1978. Vol. 14, No 1. Pp. 50–65.
16. *Balkizov Zh. A.* Boundary Value Problems with Data on Opposite Characteristics for a Second-Order Mixed-Hyperbolic Equation. Reports of the Adyghe (Cherkessian) International Academy of Sciences. 2020. V. 20, No. 3. Pp. 6–13. [in Russian]
17. *Balkizov Zh. A.* Boundary value problems for a mixed-hyperbolic equation. Bulletin of the Dagestan State University. Series 1: Natural Sciences. 2021. V. 36, No. 1. Pp. 7–14. [in Russian]
18. *Salakhitdinov M. S., Mirsaburov M.* On some boundary value problems for a hyperbolic equation that degenerates inside a domain. Differ. equations. 1981. Vol. 17, No. 1. Pp. 129–136. [in Russian]
19. *Salakhitdinov M. S., Mirsaburov M.* On two nonlocal boundary value problems for a degenerate hyperbolic equation. Differ. equations. 1982. Vol. 17, No. 1. Pp. 116–127. [in Russian]
20. *Efimova S. V., Repin O. A.* A Problem with Nonlocal Conditions on Characteristics for the Moisture Transfer Equation. Differential Equations. 2004. Vol. 40, No. 10. Pp. 1498–1502.
21. *Repin O. A.* On a problem with M. Saigoч operators on characteristics for a hyperbolic equation degenerate inside a domain. Bulletin of the Samara State Technical University. Series of physical and mathematical sciences. 2006. V. 10, No. 43. Pp. 10–14. [In Russian]
22. *Balkizov Zh. A.* A problem with a shift for a degenerate hyperbolic equation of the first kind. Bulletin of the Samara State Technical University. Series of physical and mathematical sciences. 2021. V. 25, No. 1. Pp. 21–34. [In Russian]
23. *Zhegalov V. I.* Boundary value problem for a mixed type equation with a boundary condition on both characteristics with discontinuities on the transition line. Uchenye zapiski Kazanskogo gosudarstvennogo universiteta im. IN AND. Lenin. 1962. Vol. 122, No. 3. Pp. 3–16. [in Russian]
24. *Nakhushev A. M.* Some boundary value problems for hyperbolic equations and equations of mixed type. Differ. Uravn. 1969. Vol. 5, No. 1. Pp. 44–59. [in Russian]
25. *Nakhushev A. M.* A new boundary value problem for a degenerate hyperbolic equation. Doklady AN SSSR. 1969. Vol. 187, No. 4. Pp. 736–739. [in Russian]
26. *Nakhushev A. M.* Problems with displacement for partial differential equations. 2006. 287 p.
27. *Smirnov M. M.* Degenerate hyperbolic equations. 1977. 160 p. [in Russian]
28. *Tikhonov A. N., Samarsky A. A.* Equations of mathematical physics. 1977. 736 p. [in Russian]

Submitted 17.03.2023; approved after reviewing 21.03.2023; accepted for publication 23.03.2023.

About the author:

Zhiraslan Anatolevich Balkizov, Ph.D. (Phys & Math) Leading Researcher, Department of Mixed Type Equations, Institute of Applied Mathematics and Automation of KBSC RAS, (360017, 89 A Shortanova St., Nalchik, Russia), https://orcid.org/0000-0001-5329-7766, Giraslan@yandex.ru

The author has read and approved the final version of the manuscript.

MATHEMATICS