МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.91
DOI: 10.47928/1726-9946-2023-23-2-11-17
EDN: NGAJVN

Научная статья

Начальная задача для дифференциального уравнения дробного порядка с переменными коэффициентами и с переменным запаздыванием

М. Г. Мажгихова
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН
г. Нальчик, Россия
mazhgihova.madina@yandex.ru

Аннотация. В данной работе исследуется линейное обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами, с оператором дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна первого порядка и с переменным запаздыванием. Исследуемое уравнение редуцировано к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Выписано общее представление решения начальной задачи в явном виде. Решение задачи получено методом шагов. Дробные операторы учитывают историю рассматриваемого процесса, что позволяет моделировать различные эффекты, часто встречающиеся в природных явлениях и представляют собой хороший инструмент для описания памяти и наследственных свойств различных материалов и процессов. При протекании процессов происходит задержка времени. Задержка возникает, потому что всегда существует временная продолжительность некоторых процессов. Поэтому, дифференциальные уравнения, содержащие как дробную производную, так и запаздывание аргумента, являются более реалистичными при описании математических моделей различных процессов.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение дробного порядка, дробная производная, производная Джрбашяна – Нерсесяна, дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом, интегральное уравнение Вольтерра, переменное запаздывание, начальная задача, метод шагов.

Благодарности: автор выражает благодарность рецензентам за указанные замечания, которые позволили повысить качество статьи.

Для цитирования. *Мажгихова М. Г.* Начальная задача для дифференциального уравнения дробного порядка с переменными коэффициентами и с переменным запаздыванием // Доклады АМАН. 2023. Т. 23, № 2. С. 11–17. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2023-23-2-11-17, EDN: NGAJVN

© Мажгихова М. Г., 2023

Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

MSC 34A08, 34B05 Original article

Initial value problem for differential equation of fractional order with variable coefficients and with variable delay

Madina G. Mazhgikhova
Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik, Russia
mazhgihova.madina@yandex.ru

Abstract. In this paper, for a linear ordinary differential equation with variable coefficients, with a Dzhrbashyan – Nersesyan fractional differentiation operator of the first order and with variable delay, the method of steps for solving the initial problem is implemented. Fractional operators take into account the history of the process under consideration. There is also a time delay during the processes. The delay occurs because there is always a time duration for some processes. Therefore, differential equations containing both a fractional derivative and an delay argument are more realistic when describing mathematical models of various processes. The equation under study is equivalently reduced to a Volterra integral equation of the second kind. The general representation of the solution is explicitly written out.

Keywords: fractional order differential equation, fractional derivative, Dzhrbashyan – Nersesyan derivative, delay differential equation, Volterra integral equation, variable delay, initial value problem, method of steps.

Acknowledgments: the author is thankful to the anonymous reviewer for his valuable remakes.

For citation. *M. G. Mazhgikhova* Initial value problem for differential equation of fractional order with variable coefficients and with variable delay Adyghe Int. Sci. J. 2023. Vol. 23, No. 2. P. 11–17. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2023-23-2-11-17, EDN: NGAJVN

© Mazhgikhova M. G., 2023

Введение. Постановка задачи

В данной работе исследуется начальная задача для уравнения с оператором дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна с переменными коэффициентами и с переменным запаздыванием

$$D_{0t}^{\{\gamma_0,\gamma_1\}}u(t) - \lambda(t)u(t) - \mu(t)u(t-\tau(t)) = f(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

где $0 < \gamma_0, \gamma_1 \leq 1$, причем $\gamma_0 + \gamma_1 > 1$, $\lambda(t), \mu(t)$ – непрерывные функции, функция $\tau(t)$ – непрерывная функция, обладающая следующими свойствами:

1) функция $\tau(t) > 0$ для всех $t \in [0, \infty)$;

2) для любого $c \geq -\tau(0)$ функция $\tau(t)$ пересекается с прямой $t - c$ ровно в одной точке.

Оператор дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна с двумя параметрами γ_0, γ_1 определяется соотношением [1]

$$D_{0t}^{\{\gamma_0,\gamma_1\}}u(t) = D_{0t}^{\gamma_1-1}D_{0t}^{\gamma_0}u(t), \tag{2}$$

где $D_{0t}^{\gamma_1-1}, D_{0t}^{\gamma_0}$ – операторы дробного интегрирования и дифференцирования Римана – Лиувилля [2]

$$D_{st}^{\alpha}g(t) = \begin{cases} \frac{\text{sign(t-s)}}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_s^t \frac{g(\xi)d\xi}{|t-\xi|^{\alpha+1}}, & \alpha < 0; \\ g(t), & \alpha = 0; \\ \text{sign}^n(t-s)\frac{d^n}{dt^n}D_{st}^{\alpha-n}g(t), & n-1 < \alpha \le n, n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{3}$$

$\Gamma(z)$ – гамма функция Эйлера.

В случае $\gamma_0 = \alpha, \gamma_1 = 1$ оператор Джрбашяна – Нерсесяна переходит в дробный оператор Римана – Лиувилля [2, с. 9]

$$D_{0t}^{\{\alpha,1\}}u(t) = D_{0t}^{\alpha}u(t), \quad 0 < \alpha \le 1,$$

а при $\gamma_1 = \alpha, \gamma_0 = 1$ оператор Джрбашяна – Нерсесяна переходит в производную Герасимова – Капуто (регуляризованная дробная производная) [2, с. 11]:

$$D_{0t}^{\{1,\alpha\}}u(t) = \partial_{0t}^{\alpha}u(t), \quad 0 < \alpha \le 1,$$

где дробная производная Герасимова – Капуто определяется равенством

$$\partial_{0t}^{\alpha}u(t) = D_{0t}^{\alpha-m}u^{(m)}(t), \quad m-1 < \alpha \le m, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Теорема существования и единственности решения начальной задачи для уравнения с оператором дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна доказана в работе [1]. Решение начальной задачи для уравнения с производной Джрбащяна – Нерсесяна с постоянными коэффициентами и с запаздывающим аргументом получено в явном виде в работе [3].

В данной работе решается начальная задача для уравнения с переменными коэффициентами и с переменным запаздыванием.

Решение задачи будем искать методом шагов. Построим последовательность точек t_k таких, что $t_0 = 0$, t_{k+1} определяются как решения уравнения

$$t - \tau(t) = t_k,$$

то есть из соотношения

$$t_{k+1} = t_k + \tau(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Из свойств, наложенных на функцию $\tau(t)$, следует, что $t_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Разобьем луч $(0, \infty)$ точками t_k

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \ldots. \tag{5}$$

Регулярным решением уравнения (1) назовем функцию $u(t) \in C[-\tau(0), 0] \cup (0, \infty)$ и $D_{0t}^{\gamma_0-1}u(t) \in AC[0, \infty)$, которая удовлетворяет этому уравнению для всех $t > 0$.

Задача. *Найти регулярное решение $u(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию*

$$u(t) = \varphi_0(t), \quad -\tau(0) \le t \le 0, \quad \lim_{t \to 0} D_{0t}^{\gamma_0-1}u = a. \tag{6}$$

Подействовав оператором $D_{0t}^{-\alpha}$ на обе части уравнения (1), приведём его к интегральному виду:

$$u(t) - D_{0t}^{-\alpha}\lambda(t)u(t) - D_{0t}^{-\alpha}\mu(t)u(t-\tau(t)) = D_{0t}^{-\alpha}f(t) + a\frac{t^{\gamma_0-1}}{\Gamma(\gamma_0)}. \tag{7}$$

На первом шаге $t \in (0, t_1]$. Тогда $t - \tau(t) \in [-\tau(0), 0]$, а $u(t-\tau(t)) = \varphi_0(t-\tau(t))$, и уравнение (7) сводится к следующему уравнению

$$u(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \lambda(\xi)(t-\xi)^{\alpha-1}u(\xi)d\xi = F_0(t), \tag{8}$$

где

$$F_0(t) = D_{0t}^{-\alpha}\mu(t)u(t-\tau(t)) + D_{0t}^{-\alpha}f(t) + a\frac{t^{\gamma_0-1}}{\Gamma(\gamma_0)}.$$

На втором шаге $t \in [t_1, t_2]$, а $t - \tau(t) \in [0, t_1]$. С учетом этого уравнение (7) сводится к уравнению

$$u(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^t \lambda(\xi)(t-\xi)^{\alpha-1}u(\xi)d\xi = F_1(t),$$

где

$$F_1(t) = D_{0t}^{-\alpha}f(t) + a\frac{t^{\gamma_0-1}}{\Gamma(\gamma_0)} + D_{0t}^{-\alpha}\mu(t)u(t-\tau(t)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1} \lambda(\xi)u(\xi)(t-\xi)^{\alpha-1}d\xi.$$

Продолжая метод шагов, на $k+1$ -ом шаге при $t \in [t_k, t_{k+1}]$ уравнение (7) запишем в виде

$$u(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_k}^t \lambda(\xi)(t-\xi)^{\alpha-1}u(\xi)d\xi = F_k(t), \tag{9}$$

где

$$F_k = D_{0t}^{-\alpha}f(t) + a\frac{t^{\gamma_0-1}}{\Gamma(\gamma_0)} + D_{0t}^{-\alpha}\mu(t)u(t-\tau(t)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_k} \lambda(\xi)u(\xi)(t-\xi)^{\alpha-1}d\xi. \tag{10}$$

Таким образом, решение задачи (1), (6) на каждом шаге сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра.

Проверим непрерывность решения $u(t)$ в каждой точке t_k $(k = 1, \ldots, n-1)$. Действительно,

$$\lim_{t\to t_k-0} u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k-0} \lambda(\xi)u(\xi)(t_k-\xi)^{\alpha-1}d\xi+$$

$$+\left[D_{0t}^{-\alpha}f(t) + a\frac{t^{\gamma_0-1}}{\Gamma(\gamma_0)} + D_{0t}^{-\alpha}\mu(t)u(t-\tau(t))\right]_{t=t_k-0} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{t_{k-1}} \lambda(\xi)u(\xi)(t_k-\xi)^{\alpha-1}d\xi =$$

$$= D_{0t_k}^{-\alpha}\lambda(t)u(t) + \left[D_{0t}^{-\alpha}f(t) + a\frac{t^{\gamma_0-1}}{\Gamma(\gamma_0)} + D_{0t}^{-\alpha}\mu(t)u(t-\tau(t))\right]_{t=t_k};$$

$$\lim_{t\to t_k+0} u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{t_k}^{t_k+0} \lambda(\xi)u(\xi)(t_k-\xi)^{\alpha-1}d\xi+$$

$$+\left[D_{0t}^{-\alpha}f(t) + a\frac{t^{\gamma_0-1}}{\Gamma(\gamma_0)} + D_{0t}^{-\alpha}\mu(t)u(t-\tau(t))\right]_{t=t_k+0} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{t_k} \lambda(\xi)u(\xi)(t_k-\xi)^{\alpha-1}d\xi =$$

$$= \left[D_{0t}^{-\alpha}f(t) + a\frac{t^{\gamma_0-1}}{\Gamma(\gamma_0)} + D_{0t}^{-\alpha}\mu(t)u(t-\tau(t))\right]_{t=t_k} + D_{0t_k}^{-\alpha}\lambda(t)u(t).$$

Замечание 1. Решение интегрального уравнения (7) при $t \in [t_k, t_{k+1}]$ $(k = 0, 1, \dots)$ имеет вид:

$$u(t) = F_k(t) + \int\limits_{t_k}^{t} F_k(\xi)\sum_{n=0}^{\infty} K_n(t,\xi)d\xi,$$

где

$$K_n(t,\xi) = \int\limits_{\xi}^{t} K(t,s)K_{n-1}(s,\xi)ds, \quad K(t,\xi) = K_1(t,\xi) = \frac{(t-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lambda(\xi).$$

Замечание 2. Отметим, что случай, когда метод шагов не может быть продолжен далее некоторой точки t_k называется особым и может наступить при $\tau(t_k) = 0$ когда в окрестности справа от точки t_k функция $\tau(t)$ растет медленнее, чем t. Особый случай заведомо не может наступить, если $\inf \tau(t) > 0$ [4, с. 21].

Замечание 3. В случае, когда $\gamma_0 = 1$, $\gamma_1 = \alpha$ и λ, μ – произвольные постоянные, из уравнения (1) следует уравнение с производной Герасимова – Капуто порядка $0 < \alpha \le 1$

$$\partial_{0t}^{\alpha}u(t) - \lambda u(t) - \mu u(t-\tau(t)) = f(t), \quad t > 0,$$

и решение начальной задачи для него запишется в следующем виде для всех $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots$:

$$u(t) = u(t_k)E_{\alpha,1}(\lambda(t-t_k)^{\alpha})+$$

$$+ \int_{t_k}^{t} \left[f(\xi) + \mu u(\xi - \tau(\xi)) - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{0}^{t_k} \frac{u'(s)ds}{(\xi - s)^{\alpha}} \right] (t - \xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t - \xi)^{\alpha}) d\xi.$$

Замечание 4. В случае, когда $\gamma_0 = \alpha$, $\gamma_1 = 1$ и λ, μ – произвольные постоянные, из уравнения (1) следует уравнение с производной Римана – Лиувилля порядка $0 < \alpha \le 1$

$$D_{0t}^{\alpha} u(t) - \lambda u(t) - \mu u(t - \tau(t)) = f(t), \quad t > 0,$$

и решение начальной задачи для него запишется в следующем виде для всех $t \in (t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots$:

$$u(t) = F_k(t) + \lambda \int_{t_k}^{t} F_k(\xi)(t - \xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t - \xi)^{\alpha}), \quad t \in (t_k, t_{k+1}],\ k = 0, 1, \ldots$$

где $F_k(t)$ определяется равенством (10).

Список использованных источников

1. *Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. Акад. Наук Арм. ССР. 1968. Т. 3, № 1. С. 3–29.
2. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
3. *Мажгихова М. Г.* Задача Коши для уравнения с дробной производной Джрбашяна – Нерсесяна с запаздывающим аргументом // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 42, № 1. С. 98–107. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-98-107
4. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.

Поступила 14.06.2023; одобрена после рецензирования 20.06.2023; принята к публикации 23.06.2023.

Об авторе:

Мажгихова Мадина Гумаровна, младший научный сотрудник Отдела дробного исчисления Института прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, (360017, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова 89 А), https://orcid.org/0000-0001-7612-8850, mazhgihova.madina@yandex.ru

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

References

1. *Dzhrbashyan M. M., Nersesyan A. B.* Drobnye proizvodnye i zadacha Koshi dlya differentsial'nykh uravneniy drobnogo poryadka [Fractional derivatives and Cauchy problem for differential equations of fractional order] // Izv. Akad. Nauk Arm. SSR. 1968. Vol. 3, № 1. P. 3–29.
2. *Nakhushev A. M.* Drobnoe ischislenie i ego primenenie [Fractional calculus and its application]. M.: Fizmatlit, 2003. 272 p.
3. *Mazhgikhova M. G.* Zadacha Koshi dlya uravneniya s drobnoy proizvodnoy Dzhrbashyana – Nersesyana s zapazdyvayushchim argumentom [The Cauchy Problem for the Delay Differential Equation with Dzhrbashyan – Nersesyan Fractional Derivative] // Vestnik KRAUNC. 2023. Vol. 42, № 1. P. 98–107. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-98-107

4. *El'sgol'ts L. E., Norkin S. B.* Vvedenie v teoriyu differentsial'nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom [Introduction to the theory of differential equations with deviating argument]. M.: Nauka, 1971. 296 p.

Submitted 14.06.2023; approved after reviewing 20.06.2023; accepted for publication 23.06.2023.

About the author:

Mazhgikhova Madina Gumarovna, Junior Researcher of Department of Fractional Calculus, Institute of Applied Mathematics and Automation of KBSC RAS, (360017, 89 A Shortanova St., Nalchik, Russia), https://orcid.org/0000-0001-7612-8850, mazhgihova.madina@yandex.ru

The author has read and approved the final version of the manuscript.