МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.91
DOI: 10.47928/1726-9946-2023-23-4-16-22
EDN: ECLJES

Научная статья

О корректности начальных задач для уравнения дробной диффузии

Ф. Т. Богатырева
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН
г. Нальчик, Россия
fatima_ bogatyreva@bk.ru

Аннотация. В работе исследуется параболическое уравнение в частных производных второго порядка с дробным дифференцированием по временной переменной. Оператор дробного дифференцирования представляет собой линейную комбинацию дробных производных Римана–Лиувилля и Герасимова–Капуто. Показано, что распределение порядков дробных производных, входящих в уравнение влияет на корректность начальных задач для рассматриваемого уравнения.

Ключевые слова: уравнение дробной диффузии, дробная производная Римана–Лиувилля, дробная производная Герасимова–Капуто, функция Райта.

Для цитирования. *Богатырева Ф. Т.* О корректности начальных задач для уравнения дробной диффузии // Доклады АМАН. 2023. Т. 23, № 4. С. 16–22. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2023-23-4-16-22; EDN: ECLJES

MSC 34A08, 34B05

Original article

On the correctness of initial problems for the fractional diffusion equation

Fatima T. Bogatyreva
Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik, Russia
fatima_ bogatyreva@bk.ru

Abstract. The paper studies a second-order parabolic partial differential equation with fractional differentiation with respect to a time variable. The fractional differentiation operator is a linear combination of the Riemann-Liouville and Gerasimov-Caputo fractional derivatives. It is shown that the distribution of orders of fractional derivatives, included in the equation affects the correctness of the initial problems for the equation under consideration.

Keywords: fractional diffusion equation, Riemann–Liouville operator, Gerasimov–Caputo operator, fractional derivative, Wright function.

For citation. *Bogatyreva F. T.* On the correctness of initial problems for the fractional diffusion equation. Adyghe Int. Sci. J. 2023. Vol. 23, No. 4. P. 16–22. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2023-23-4-16-22; EDN: ECLJES

В области $\Omega = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv aD_{0y}^{\{\alpha,\beta\}}u(x, y) + bD_{0y}^{\{\gamma,\delta\}}u(x, y) - u_{xx}(x, y) = f(x, y), \tag{1}$$

где $D_{0y}^{\{\alpha,\beta\}}, D_{0y}^{\{\gamma,\delta\}}$ – операторы дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна.

Уравнения дробной диффузии и диффузионно-волновые уравнения привлекают к себе большой интерес в связи с широким применением в физике и моделировании. Приведем лишь малую часть работ, в которых исследованы краевые и начально-краевые задачи для таких уравнений с операторами Римана–Лиувилля и Герасимова–Капуто в ограниченных и неограниченных областях [1]– [13].

Для дробного телеграфного уравнения с производными Римана–Лиувилля в работах [7], [8] был установлен эффект влияния младшего члена с дробной производной на корректность задания начальных условий, доказаны теоремы существования и единственности решения видоизмененной задачи Коши.

Для уравнения (1) в работе [16] доказано, что общее представление решения имеет вид

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{y} f(s, t)G_1(x - s, y - t)dtds+$$

$$+a\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)G_1^{1-\beta}(x - s, y)ds + b\int_{-\infty}^{\infty} \psi(s)G_1^{1-\delta}(x - s, y)ds. \tag{2}$$

Здесь

$$G_n^{\xi}(x, y) = G_n^{\xi}(x, y; \alpha, \beta; a, b) = (4\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{0}^{\infty} t^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) w_{\xi}(t, y)dt, \tag{3}$$

где

$$w_{\xi}(t, y) = y^{\xi_1-1}e_{1,\alpha}^{1,\xi_1}\left(-a\frac{t}{y^{\alpha}}\right) * y^{\xi_2-1}e_{1,\beta}^{1,\xi_2}\left(-b\frac{t}{y^{\beta}}\right),\ \xi = \xi_1 + \xi_2,\ w(t, y) = w_0(t, y), \tag{4}$$

$e_{1,\alpha}^{1,\beta}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta-\alpha n)}$ – функция Райта [4], $(h * g)(y) = \int\limits_0^y h(y - t)g(t)dt$ – свертка Лапласа функций $h(y)$ и $g(y)$.

Для функции $G_n^\eta(x,y)$ для любого $\xi < (2-\sigma)\left(\frac{\lambda\sigma^\sigma}{4}\right)^{\frac{1}{2-\sigma}}$, $|x|>0$ и $y>0$ справедливо неравенство [16]:

$$|G_1^\eta(x,y)| \le Cy^{\eta+\frac{\sigma}{2}-1}\exp\left(-\xi z^{\frac{1}{2-\sigma}}\right). \tag{5}$$

где $\sigma = \max\{\alpha,\beta\}$, $\lambda = \max\{a,b\}$.

Одним из результатов работы [16] являлся вывод о том, что в зависимости от распределения параметров α,β,γ и δ, некоторые из слагаемых в представлении (2) могут оказаться равны нулю. Поэтому, корректность тех или иных краевых задач для уравнения (1) будет зависеть от набора этих параметров, а различные пары $\{\alpha,\beta\}$ и $\{\gamma,\delta\}$ порождают разные краевые задачи.

В данной работе продемонстрируем это на модельном уравнении

$$Lu \equiv aD_{0y}^\alpha u(x,y) + b\partial_{0y}^\beta u(x,y) - u_{xx}(x,y) = 0, \tag{6}$$

где $D_{0y}^\alpha = D_{0x}^{\{\alpha,1\}}$, $\partial_{0y}^\beta = D_{0x}^{\{1,\delta\}}$ – операторы дробного дифференцирования Римана–Лиувилля и Герасимова–Капуто [8], соответственно, $0<\alpha,\beta\le 1$ a и b положительные коэффициенты.

Из равенства (2) следует, что решение уравнения (6) будет иметь вид

$$u(x,y) = a\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)G_1(x-s,y)ds + b\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(s)G_1^{1-\beta}(x-s,y)ds, \tag{7}$$

где $\varphi(x) = \lim\limits_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}u(x,y), \psi(x) = u(x,0)$.

Регулярным решением уравнения (6) в области Ω назовем функцию $u(x,y)$ такую, что $u(x,y)$ в области Ω дважды непрерывно дифференцируема по переменной x; $u(x,y) \in C(\Omega_0)$, $\Omega_0 = \mathbb{R}\times[0,T)$; $D_{0y}^{\alpha-1}u(x,y)$, непрерывно дифференцируема по y при каждом x; $u(x,y)$ абсолютно непрерывна по переменной y при каждом x и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(x,y)\in\Omega$.

Так как $u(x,y)\in C(\Omega_0)$, то предел $\lim\limits_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}u(x,y) = 0$, и поэтому условие

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}u(x,y) = \varphi(x)$$

нельзя задавать произвольным образом, т.е. чтобы функция $\varphi(x)$ была произвольно задана. Следовательно решение (7) примет вид

$$u(x,y) = b\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(s)G_1^{1-\beta}(x-s,y)ds. \tag{8}$$

Лемма. Пусть $u(x,y)$ – регулярное решение уравнения (1), $\psi(x)$ непрерывна в $\mathbb{R}$ и выполняется соотношение

$$\lim_{x\to\infty}\psi(x)\exp\left(-kx^{\frac{2}{2-\sigma}}\right) = 0,$$

где $k < (2-\sigma)\left(\frac{\sigma}{T}\right)^{\frac{\sigma}{2-\sigma}}\left(\frac{\lambda}{4}\right)^{\frac{1}{2-\sigma}}$. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{y\to 0} u(x,y) = \begin{cases} 0, \quad \text{если} \quad \alpha > \beta, \\ \dfrac{b}{a+b}\psi(x), \quad \text{если} \quad \alpha = \beta, \\ \psi(x), \quad \text{если} \quad \alpha < \beta. \end{cases}$$

Доказательство. Запишем равенство (8) в следующем виде

$$u(x,y) = b\left(\int\limits_{-\infty}^{x-\varepsilon} + \int\limits_{x+\varepsilon}^{\infty}\right)[\psi(s)-\psi(x)]G_1^{1-\beta}(x-s,y)ds + b\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}[\psi(s)-\psi(x)]G_1^{1-\beta}(x-s,y)ds+$$

$$+\psi(x)b\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_1^{1-\beta}(x-s,y)ds = I_1 + I_2 + I_3.$$

С учетом оценки (5) и неравенства $G_1^{\eta}(x,y) > 0,\ \eta \geq 0$ для любого положительного ε справедливы соотношения

$$\lim_{y\to 0} I_1 = 0, \quad \lim_{y\to 0} I_2 \leq \sup_{|x-s|<\varepsilon} |\psi(s)-\psi(x)|.$$

Рассмотрим выражение

$$J = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_1^{1-\beta}(x-s,y)ds. \tag{9}$$

Принимая во внимание (3) перепишем (9) в виде

$$J = (4\pi)^{-\frac{1}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} t^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4t}\right)w_{1-\beta}(t,y)dtds,$$

или же, поменяв порядок интегрирования

$$J = (4\pi)^{-\frac{1}{2}}\int\limits_{0}^{\infty} t^{-\frac{1}{2}}w_{1-\beta}(t,y)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4t}\right)dsdt.$$

Сделав во внутреннем интеграле замену $\xi = (x-s)t^{-1/2}$ имеем что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4t}\right)ds = 2t^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}.$$

С учетом последнего получаем, что равенство (9), принимая во внимание (4), равносильно равенству

$$J = \int_0^\infty w_{1-\beta}(t,y)dt = \int_0^\infty y^{-1} e_{1,\alpha}^{1,0}\left(-a\frac{t}{y^\alpha}\right) * y^{-\beta} e_{1,\beta}^{1,1-\beta}\left(-b\frac{t}{y^\beta}\right) dt.$$

Далее, по теореме о свертке (умножении изображений) [18], имеем

$$J = \int_0^\infty e^{-atp^\alpha - btp^\beta} p^{\beta-1} dt = \frac{p^{\beta-1}}{ap^\alpha + bp^\beta}. \tag{10}$$

Рассмотрим три случая:

1. Пусть $\alpha > \beta$. Тогда из (10) получаем выражение

$$J = \frac{p^{-1}}{a\left(p^{\alpha-\beta} + \frac{b}{a}\right)} = \frac{1}{a} y^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta,\alpha-\beta+1}\left(-\frac{b}{a} y^{\alpha-\beta}\right),$$

которое при $y \to 0$ стремится к нулю.

2. Пусть $\alpha = \beta$. Тогда из (10) получаем выражение

$$J = \frac{p^{-1}}{a+b} = \frac{1}{a+b}.$$

3. Пусть $\alpha < \beta$. Тогда из (10) имеем

$$J = \frac{p^{\beta-\alpha-1}}{b\left(p^{\beta-\alpha} + \frac{a}{b}\right)} = \frac{1}{b} E_{\beta-\alpha,1}\left(-\frac{a}{b} y^{\beta-\alpha}\right),$$

которое при $y \to 0$ стремится к $\frac{1}{b}$.

Таким образом получили, что при $\alpha < \beta$ предел $\lim\limits_{y\to 0} I_3 = \psi(x)$. Лемма доказана.

Утверждения леммы позволяют сделать следующие заключения:

1. Если $\alpha > \beta$, то уравнение (6) освобождается от начальных условий, т.е. в этом случае уравнение (6) при $a^2 + b^2 \neq 0$ не имеет отличных от нуля регулярных решений.

2. Если $\alpha = \beta$, то начальная задача

$$u(x,0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

для уравнения (6) будет корректна только в том случае если $a = 0$.

3. Если $\alpha < \beta$, то задача (11) для уравнения (6) оказывается корректной, и решение имеет вид (8).

Список использованных источников

1. *Псху А. В.* Решение первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка // Дифференц. уравнения, 2003. Т. 39, № 9. С. 1286–1289.
2. *Псху А. В.* Решение краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка методом функции Грина // Дифференц. уравнения, 2003. Т. 39, № 10. С. 1430–1433.

3. *Eidelman S. D., Kochubei A. N.* Cauchy problem for fractional diffusion equations // J. Differential Equations, 2004. Vol 199. P. 211–255.
4. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 p.
5. *Псху А. В.* Уравнение диффузии дробного порядка со многими временными переменными // Матем. моделирование и краев. задачи, 2006. Ч. 3. С. 187–190.
6. *Luchko Yu.* Boundary value problems for the generalized timefractional diffusion equation of distributed order // Fract. Calc. Appl. Anal, 2009. Vol 12, No. 4. P. 409–422.
7. *Luchko Yu.* Initial-boundary-value problems for the generalized multiterm time-fractional diffusion equation // J. Math. Anal. Appl, 2011. Vol 374, No. 2 (2011). P. 538–548.
8. *Мамчуев М. О.* Краевые задачи для уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядка. Нальчик. 2013. 200 с.
9. *Pskhu A. V.* Green functions of the first boundary-value problem for a fractional diffusion-wave equation in multidimensional domains // Mathematics. 2020. No 8(4). P. 464.
10. *Pskhu A. V.* Stabilization of solutions to the Cauchy problem for fractional diffusion-wave equation // Journal of Mathematical Sciences. 2020. No 250. P. 800–810.
11. *Pskhu A. V., Rekhviashvili S.* Fractional diffusion-wave equation with application in electrodynamics // Journal of Mathematical Sciences. 2020. No 8.
12. *Pskhu A. V., Ramazanov M. I., Gulmanov N. K., Iskakov S. A.* Boundary value problem for fractional diffusion equation in a curvilinear angle domain // Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series. 2022. No 1(105)/2022. P. 83–95.
13. *Псху А. В.* Уравнение дробной диффузии с оператором дискретно распределенного дифференцирования // Сибирские электронные математические известия. 2016. Т. 12. С. 1078–1098.
14. *Мамчуев М.О.* Фундаментальное решение нагруженного параболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 5. С. 611-620.
15. *Мамчуев М.О.* Видоизменённая задача Коши для нагруженного параболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 9. С. 1147-1153.
16. *Богатырева Ф. Т.* О представлении решения уравнения диффузии с операторами Джрбашяна – Нерсесяна // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 40, № 3. С. 16-27.
17. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
18. *Диткин В. А., Прудников А. П.*Интегральные преобразования и операционное исчисление. 1961.

Поступила 18.12.2023; одобрена после рецензирования 21.12.2023; принята к публикации 22.12.2023.

Об авторе:

Богатырева Фатима Тахировна, младший научный сотрудник, Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН (360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шорнтанова 89 А), ORCID https://orcid.org/0000-0003-1765-066X, fatima_bogatyreva@bk.ru

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

References

1. *Pskhu A. V.* Solution of the first boundary value problem for a fractional-order diffusion equation. Differential Equations. 2003. Vol. 39, № 9. P. 1359–1363. https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000012703.45373.aa

2. *Pskhu A. V.* Solution of boundary value problems for the fractional diffusion equation by the Green function method. Differential Equations. 2003. Vol. 39, № 10. P. 1509–1513. https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000017925.68789.e9
3. *Eidelman S. D., Kochubei A. N.* Cauchy problem for fractional diffusion equations. Journal of Differential Equations. 2004. Vol. 199, № 2. P. 211–255.
4. *Pskhu A. V.* Uravnenija v chastnyh proizvodnyh drobnogo porjadka [Fractional partial differential equations]. M.: Nauka, 2005.
5. *Pskhu A. V.* Uravnenie diffuzii drobnogo porjadka so mnogimi vremennymi peremennymi [Fractional diffusion equation with many time variables]. Proceedings of the Third All-Russian Scientific Conference (29–31 May 2006). Part 3, Matem. Mod. Kraev. Zadachi, Samara State Technical Univ., Samara. 2006. P. 187–190.
6. *Luchko Yu.* Boundary value problems for the generalized timefractional diffusion equation of distributed order. Fract. Calc. Appl. Anal. 2009. Vol. 12, № 4. P. 409–422.
7. *Luchko Yu.* Initial-boundary-value problems for the generalized multiterm time-fractional diffusion equation. J. Math. Anal. Appl. 2011. Vol. 374, № 2. P. 538–548.
8. *Mamchuev M. O.* Kraevye zadachi dlya uravnenij i sistem uravnenij s chastnymi proizvodnymi drobnogo poryadka [Boundary value problems for equations and systems of equations with partial differentials of fractional order]. Nalchik. 2013. 200 p.
9. *Pskhu A. V.* Green functions of the first boundary-value problem for a fractional diffusion-wave equation in multidimensional domains. Mathematics. 2020. № 8(4). Article id. 464.
10. *Pskhu A. V.* Stabilization of solutions to the Cauchy problem for fractional diffusion-wave equation. Journal of Mathematical Sciences. 2020. № 250. P. 800–810.
11. *Pskhu A. V., Rekhviashvili S.* Fractional diffusion-wave equation with application in electrodynamics. Journal of Mathematical Sciences. 2020. № 8.
12. *Pskhu A. V., Ramazanov M. I., Gulmanov N. K., Iskakov S. A.* Boundary value problem for fractional diffusion equation in a curvilinear angle domain. Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series. 2022. № 1(105)/2022. P. 83–95.
13. *Pskhu A. V.* Uravnenie drobnoj diffuzii s operatorom diskretno raspredelennogo differencirovaniya [Fractional diffusion equation with discretely distributed differentiation operator]. Sib. Elektron. Mat. Izv. 2016. Vol. 13. P. 1078–1098.
14. *Mamchuev M.O.* Fundamental solution of a loaded second-order parabolic equation with constant coefficients. Differential Equations, 2015. Vol. 51, No. 5. P. 620–629
15. *Mamchuev M.O.* Modified Cauchy problem for a loaded second-order parabolic equation with constant coefficients. Differential Equations, 2015. Vol. 51, No. 9. P. 1137–1144.
16. *Bogatyreva F. T.* O predstavlenii resheniya uravneniya diffuzii s operatorami Dzhrbashyana-Nersesyana [On representation of solution of the diffusion equation with Dzhrbashyan–Nersesyan operators]. Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2022. Vol. 40, №. 3. P. 16–27.
17. *Nakhushev A. M.* Drobnoe ischislenie i ego primenenie [Fractional calculus and its application]. M.: Fizmatlit, 2003. 272 p.
18. *Ditkin V. A., Prudnikov A. P.* Integral'nye preobrazovaniya i operacionnoe ischislenie [Integral transformations and operational calculus]. 1961.

Submitted 18.12.2023; approved after reviewing 21.12.2023; accepted for publication 22.12.2023.

About the author:

Fatima Takhirovna Bogatyreva, junior researcher, Institute of Applied Mathematics and Automation, KBSC RAS (360000, Russia, Nalchik, Shortanova St. 89 A),
ORCID https://orcid.org/0000-0003-1765-066X, fatima_bogatyreva@bk.ru

The author has read and approved the final version of the manuscript.