МАТЕМАТИКА

УДК 517.95
DOI: 10.47928/1726-9946-2024-24-1-11-22
EDN: INICMW

Научная статья

К вопросу существования решения первой краевой задачи для уравнения влагопереноса Аллера – Лыкова с оператором дробного дискретно распределенного дифференцирования

С. Х. Геккиева[1], М. А. Керефов[2]

[1]*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, г. Нальчик, Россия*
[2]*Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, г. Нальчик, Россия*
[1]*gekkiva_s@mail.ru*, [2]*kerefov@mail.ru*

Аннотация. В работе исследована первая краевая задача для уравнения влагопереноса Аллера – Лыкова с оператором дробного дискретно распределенного дифференцирования. Дробные производные, входящие в уравнение, понимаются в смысле Римана – Лиувилля. Рассматриваемое уравнение является обобщением классического уравнения Аллера – Лыкова. В нем учитывается коллоидная капиллярно-пористая структура почвы, в том числе, наличие потоков против потенциала влажности. Существование решения первой краевой задачи доказано методом Фурье.

Ключевые слова: производная дробного порядка, задача Коши, дифференциальное уравнение дробного порядка, уравнение влагопереноса Аллера – Лыкова.

Финансирование. Работа не выполнялась в рамках фондов.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Для цитирования. *Геккиева С. Х., Керефов М. А.* К вопросу существования решения первой краевой задачи для уравнения влагопереноса Аллера – Лыкова с оператором дробного дискретно распределенного дифференцирования // Доклады АМАН. 2024. Т. 24, № 1. С. 11–22.
DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2024-24-1-11-22; EDN: INICMW

MATHEMATICS

MSC 35E99 Original article

On the question of the existence of a solution to the first boundary value problem for the Aller – Lykov moisture transfer equation with the operator of fractional discretely distributed differentiation

Sakinat Kh. Gekkieva[1], **Marat A. Kerefov**[2]

[1]*Institute of Applied Mathematics and Automation of KBSC RAS, Nalchik, Russia*
[2]*Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov, Nalchik, Russia*
[1]*gekkiva_s@mail.ru*, [2]*kerefov@mail.ru*

Abstract. The paper investigates the first boundary value problem for the Aller–Lykov moisture transfer equation with the operator of fractional discretely distributed differentiation. Fractional derivatives included in the equation are understood in the Riemann–Liouville sense. The equation in question is a generalization of the classical Aller–Lykov equation. It takes into account the colloidal capillary-porous structure of the soil, including the presence of flows against the moisture potential. The existence of a solution to the first boundary value problem is proved by the Fourier method.

Keywords: fractional order derivative, Cauchy problem, fractional order differential equation, Aller – Lykov moisture transfer equation.

Funding. The work was not carried out within the framework of funds

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

For citation. *Gekkieva S. Kh., Kerefov M. A.* On the question of the existence of a solution to the first boundary value problem for the Aller – Lykov moisture transfer equation with the operator of fractional discretely distributed differentiation. Adyghe Int. Sci. J. 2024. Vol. 24, No. 1. Pp. 11–22.
DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2024-24-1-11-22; EDN: INICMW

Введение. Вопросы тепловлагопереноса в почвах являются фундаментальными при решении многих задач гидрологии, агрофизики, строительной физики и других областей науки. Исследователи при этом концентрируют свое внимание на возможности отражения в характере исходных уравнений специфических особенностей изучаемых массивов, их структуры, физических свойств, протекающих в них процессов (см. [1, гл. 6]). В связи с этим возникает качественно новый класс дифференциальных уравнений состояния и переноса с дробной производной, являющихся основой большинства математических моделей, описывающих широкий класс физических и химических процессов в средах с фрактальной структурой и памятью (см. [2, гл. 5]). Настоящая работа посвящена исследованию обобщенного уравнения влагопереноса Аллера – Лыкова:

$$A_1 D_{0t}^{\alpha} u + D_{0t}^{\beta} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(u)\frac{\partial u}{\partial x} + A D_{0t}^{\gamma}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \tag{1}$$

где $u(x,t)$ — влажность почвы в долях единицы на глубине x в момент времени t; коэффициент A_1 принимает значение $A_1 = Cx^2$, где C — константа, зависящая от коэффициента диффузии, а также пористости тела, его капиллярных свойств и вязкости жидкости [2, § 5.9, с. 197]; $D(u)$ — коэффициент диффузии; A — варьируемый коэффициент Аллера; $f(x,t)$ — плотность источников влаги; D_{0t}^{γ} — оператор дробного дифференцирования Римана – Лиувилля [2, с. 9]; $1 < \alpha < 2$; $0 < \beta, \gamma < 1$.

Для функции $u(x,t)$, зависящей от двух переменных, оператор частного дифференцирования $D_{0t}^{\nu} u(x,\tau)$ по переменной t определяется так же, как и для функции одной переменной, при этом вторая переменная x рассматривается как параметр. Так, для случая $0 < \nu < 1$ имеем

$$D_{0t}^{\nu} u(x,\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^{\nu}}\, d\tau.$$

Уравнение (1) при $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$ совпадает с уравнением влагопереноса Аллера – Лыкова, предложенным В. Я. Куликом [3] для описания процессов испарения и инфильтрации. Уравнение (1) было получено как пример «качественно нового уравнения влагопереноса», исходя из коллоидной капиллярно-пористой структуры почвы [2, с. 197].

Уравнения влагопереноса в локальной постановке рассматривались в работах многих авторов и решались методом разделения переменных, методом априорных оценок, а также численными методами [4], [5]. В работах [6]–[8], исследовано уравнение влагопереноса Аллера – Лыкова с дробной по времени производной с различного рода граничными условиями. При $1 < \alpha < 2$, $\beta = \gamma = \alpha - 1$ в [9] доказаны существование и единственность решения первой краевой задачи для уравнения (1) с постоянными коэффициентами. В работе [10] исследована вторая краевая задача. В [11] для обобщенных уравнений Аллера и Аллера – Лыкова с краевыми условиями первого рода получены решения систем разностных уравнений с постоянными коэффициентами, возникающих при использовании метода прямых. Получены априорные оценки, из которых следует сходимость решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами дробного порядка. В [12] исследованы локальные и нелокальные краевые задачи для обобщенного уравнения типа Аллера – Лыкова.

Постановка задачи. В области $Q = \{(x,t) : 0 < x < 1,\, 0 < t < T\}$ рассмотрим соответствующее (1) однородное уравнение

$$A_1 D_{0t}^{\alpha} u + D_{0t}^{\beta} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(u)\frac{\partial u}{\partial x} + A D_{0t}^{\gamma}\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{2}$$

В целом ряде реальных ситуаций, как отмечает В. Я. Кулик в [3], зависимость A_1 и D от координаты x практически устраняется (например, когда влажность меняется в небольшом диапазоне). В дальнейшем будем предполагать, что $A_1 = const$, $D(u) = D = const$ в случае, когда $A_1 = A = D \equiv 1$.

Определение 1. *Регулярным решением уравнения (2) в области Q назовем функцию $u = u(x,t)$ из класса $D_{0t}^{\alpha-2}u(x,t)$, $D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t)$, $D_{0t}^{\beta-1}u(x,t) \in C\left(\overline{Q}\right)$, $D_{0t}^{\alpha}u(x,t)$, $D_{0t}^{\beta}u(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$, $D_{0t}^{\gamma}u_{xx}(x,t) \in C\left(Q\right)$, которая удовлетворяет уравнению (2) во всех точках $u(x,t) \in Q$.*

Сформулируем первую краевую задачу.

Задача 1. *В области Q найти регулярное решение $u(x,t)$ уравнения*

$$D_{0t}^{\alpha} u + D_{0t}^{\beta} u = u_{xx} + D_{0t}^{\gamma} u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \tag{3}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < t < T, \tag{4}$$

и начальным условиям

$$D_{0t}^{\alpha-2}u(x,t)\Big|_{t=0} = \tau(x), \quad \left(D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t) + D_{0t}^{\beta-1}u(x,t)\right)\Big|_{t=0} = \nu(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{5}$$

где $\tau(x)$, $\nu(x)$ — заданные функции, $1 < \alpha < 2$, $0 < \beta$, $\gamma < 1$, $\alpha > \beta > \gamma$.

Для решения задачи 1 применим метод разделения переменных. Для начала найдем класс нетривиальных решений уравнения (3), удовлетворяющих однородным граничным условиям (4), представимых в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{6}$$

Подставляя предполагаемую форму решения (6) в уравнение (3), получаем следующие уравнения для определения функций $X(x)$, $T(t)$:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \tag{7}$$

$$D_{0t}^{\alpha} T + D_{0t}^{\alpha_1} T + \lambda D_{0t}^{\alpha_2} T + \lambda T = 0, \tag{8}$$

где $\alpha_1 = \beta$, $\alpha_2 = \gamma$.

Как известно, решение спектральной задачи (7) имеет вид

$$X_n(x) = sin(\pi k x), \quad \lambda = \lambda_k = (\pi k)^2, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Прежде, чем выпишем общее решение уравнения (8), отметим, что обыкновенные дифференциальные уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами исследовались достаточно интенсивно. Для них найдены явные представления решений начальных и краевых задач в терминах обобщенных функций Миттаг-Леффлера и функций Райта. Подробное изложение этих результатов и библиографию по теме можно найти в работах [13], [14]. Для нашей работы, чтобы избежать технически непростого аппарата теории специальных функций, возникающих при решении этих уравнений, позволим себе решить уравнение (8), редуцируя его к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода со степенным ядром, и решить его методом последовательных приближений.

Пусть $T_k(t)$ — решение уравнения (8), соответствующее собственному значению λ_k. Подействуем на уравнение (8) оператором дробного интегрирования порядка α [15, с. 15], учитывая результаты [14, §§ 2, 3], при $\alpha_2 \le \alpha - 1 \le \alpha_1$ получим:

$$T_k(t) + D_{0t}^{\alpha_1-\alpha}T_k(t) + \lambda_k D_{0t}^{\alpha_2-\alpha}T_k(t) + \frac{\lambda_k}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t \frac{T_k(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau =$$

$$= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lim_{t\to 0}\left(D_{0t}^{\alpha-1}T(t) + D_{0t}^{\alpha_1-1}T(t)\right) + \frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-2}T(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\nu_k + \frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\tau_k$$

или

$$T_k(t) + \lambda_{ik}\int\limits_0^t T_k(\tau)\left(\frac{(t-\tau)^{\alpha-\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha-\alpha_1)} + \frac{(t-\tau)^{\alpha-\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha-\alpha_2)} + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)d\tau = f(t), \qquad (10)$$

где

$$f(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\nu_k + \frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\tau_k, \quad \left(D_{0t}^{\alpha-1}T(t) + D_{0t}^{\alpha_1-1}T(t)\right)\Big|_{t=0} = \nu_k, \quad D_{0t}^{\alpha-2}T_k(t)\Big|_{t=0} = \tau_k.$$

Применим к (10) теорию интегральных уравнений Вольтерра. Вводя обозначение

$$K_1(t,\tau) = \left[\frac{(t-\tau)^{\alpha-\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha-\alpha_1)} + \frac{(t-\tau)^{\alpha-\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha-\alpha_2)} + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right]H(t-\tau), \qquad (11)$$

где $H(z) = \begin{cases} 1, & z \ge 0, \\ 0, & z < 0, \end{cases}$ — функция Хевисайда, и определяя далее последовательность ядер $\{K_n(t,\tau)\}_1^\infty$ посредством рекуррентных соотношений

$$K_{n+1}(t,\tau) = \int\limits_\tau^t K_n(t,t_1)\,K_1(t_1,\tau)\,d\tau_1, \qquad (12)$$

методом индукции докажем, что

$$K_{n+1}(t,\tau) = \left[\sum_{s=0}^{n+1}\sum_{l=0}^{n-s+1}\begin{pmatrix} n+1 \\ s,l \end{pmatrix}\frac{(t-\tau)^{(n+1)\alpha-l\alpha_1-s\alpha_2-1}}{\Gamma((n+1)\alpha-l\alpha_1-s\alpha_2)}\right]H(t-\tau), \qquad (13)$$

где $\begin{pmatrix} n+1 \\ s,l \end{pmatrix} = \frac{(n+1)!}{s!l!(n+1-s-l)!}$ — триномиальный коэффициент.

Действительно для $n=0$ представление (13) следует из (11). Предположим, что формула (13) верна для любого $p \leq n$

$$K_p(t,\tau)=\left[\sum_{s=0}^{p}\sum_{l=0}^{p-s}\left(\begin{array}{c}p\\ s,l\end{array}\right)\frac{(t-\tau)^{p\alpha-l\alpha_1-s\alpha_2-1}}{\Gamma\left(p\alpha-l\alpha_1-s\alpha_2\right)}\right]H(t-\tau),\quad p\leq n. \tag{14}$$

Подставляя формулу (14) в (12), после элементарных преобразований получаем, что формула (13) верна и для любого $p=n+1$. Это доказывает справедливость (13) для любых n.

Итак, для резольвенты уравнения (10) имеем формулу

$$R(t,\tau,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda^n)K_{n+1}(t,\tau)=$$

$$=\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda^n)\sum_{s=0}^{n+1}\sum_{l=0}^{n-s+1}\left(\begin{array}{c}n+1\\ s,l\end{array}\right)\frac{(t-\tau)^{(n+1)\alpha-l\alpha_1-s\alpha_2-1}}{\Gamma\left((n+1)\alpha-l\alpha_1-s\alpha_2\right)}\right]H(t-\tau).$$

Таким образом, интегральное уравнение (10) имеет единственное решение, представимое в виде:

$$T_k(t)=f(t)-\lambda\int\limits_0^t R(t,\tau,\lambda)f(t)d\tau=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\nu_k+\frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\tau_k-$$

$$-\int\limits_0^t\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^n\sum_{s=0}^{n+1}\sum_{l=0}^{n-s+1}\left(\begin{array}{c}n+1\\ s,l\end{array}\right)\frac{\tau^{\alpha-1}(t-\tau)^{(n+1)\alpha-l\alpha_1-s\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma\left((n+1)\alpha-l\alpha_1-s\alpha_2\right)}\nu_k d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^n\sum_{s=0}^{n+1}\sum_{l=0}^{n-s+1}\left(\begin{array}{c}n+1\\ s,l\end{array}\right)\frac{\tau^{\alpha-2}(t-\tau)^{(n+1)\alpha-l\alpha_1-s\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha-1)\Gamma\left((n+1)\alpha-l\alpha_1-s\alpha_2\right)}\tau_k d\tau=$$

$$=\nu_k\left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^{n+1}\sum_{s=0}^{n+1}\sum_{l=0}^{n-s+1}\left(\begin{array}{c}n+1\\ s,l\end{array}\right)\frac{t^{(n+1)\alpha-l\alpha_1-s\alpha_2-1}}{\Gamma\left((n+2)\alpha-l\alpha_1-s\alpha_2\right)}\right]+$$

$$+\tau_k\left[\frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}+\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^{n+1}\sum_{s=0}^{n+1}\sum_{l=0}^{n-s+1}\left(\begin{array}{c}n+1\\ s,l\end{array}\right)\frac{t^{(n+1)\alpha-l\alpha_1-s\alpha_2-2}}{\Gamma\left((n+2)\alpha-l\alpha_1-s\alpha_2-1\right)}\right].$$

Итак, решения уравнения (8), соответствующие собственным значениям λ_k, имеют вид

$$T_k(t)=\nu_k t^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^n\sum_{s=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-s}\left(\begin{array}{c}n\\ s,l\end{array}\right)\frac{t^{n\alpha-l\alpha_1-s\alpha_2}}{\Gamma\left((n+1)\alpha-l\alpha_1-s\alpha_2\right)}+$$

$$+\tau_k t^{\alpha-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^n\sum_{s=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-s}\left(\begin{array}{c}n\\ s,l\end{array}\right)\frac{t^{n\alpha-l\alpha_1-s\alpha_2}}{\Gamma\left((n+1)\alpha-l\alpha_1-s\alpha_2-1\right)}.$$

Возвращаясь к задаче (3) – (5) заключаем, что функции

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) =$$

$$= \left(\nu_k t^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n \sum_{s=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-s} \binom{n}{s,l} \frac{t^{n\alpha - l\alpha_1 - s\alpha_2}}{\Gamma\left((n+1)\alpha - l\alpha_1 - s\alpha_2\right)} + \right.$$

$$\left. + \tau_k t^{\alpha-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n \sum_{s=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-s} \binom{n}{s,l} \frac{t^{n\alpha - l\alpha_1 - s\alpha_2}}{\Gamma\left((n+1)\alpha - l\alpha_1 - s\alpha_2 - 1\right)} \right) sin(\pi k x)$$

являются частными решениями уравнения (3), удовлетворяющими граничным условиям (4), что проверяется непосредственной подстановкой.

Обратимся теперь к решению задачи (3) – (5) в общем случае. Составим ряд

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\nu_k t^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n \sum_{s=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-s} \binom{n}{s,l} \frac{t^{n\alpha - l\alpha_1 - s\alpha_2}}{\Gamma\left((n+1)\alpha - l\alpha_1 - s\alpha_2\right)} + \right.$$

$$\left. + \tau_k t^{\alpha-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n \sum_{s=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-s} \binom{n}{s,l} \frac{t^{n\alpha - l\alpha_1 - s\alpha_2}}{\Gamma\left((n+1)\alpha - l\alpha_1 - s\alpha_2 - 1\right)} \right) sin(\pi k x). \tag{15}$$

Функция $u(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям, так как им удовлетворяют все члены ряда (15). Требуя выполнения начальных условий (5), получаем:

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-2} u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\tau_k = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k sin(\pi k x) = \tau(x),$$

$$\lim_{t\to 0} \left(D_{0t}^{\alpha-1} u(x,t) + D_{0t}^{\alpha_1-1} u(x,t) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\nu_k = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k sin(\pi k x) = \nu(x).$$

Таким образом, в силу (9), получаем: разложимость начальной функции в ряд Фурье по синусам

$$\tau(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k sin(\pi k x), \quad \nu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k sin(\pi k x) \tag{16}$$

является необходимым условием разрешимости задачи 1 в классе функций, представимых в виде ряда (15).

Представления (16) имеют место тогда и только тогда, когда

$$\tau(0) = \tau(1), \quad \nu(0) = \nu(1),$$

$$\tau_k = 2\int_0^1 \tau(x) sin(\pi k x) dx, \quad \nu_k = 2\int_0^1 \nu(x) sin(\pi k x) dx.$$

Как известно из теории рядов Фурье [16, с. 696], если функция $\tau(x)$ имеет непрерывные производные до третьего порядка и удовлетворяет условиям $\tau(0)=\tau(1)=\tau''(0)=\tau''(1)$, а $\nu(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка и $\nu(0)=\nu(1)=0$, то представленная формулой (15) функция $u(x,t)$ будет обладать необходимыми производными, которые могут быть вычислены дифференцированием почленно в правой части (15).

Для обоснования метода Фурье нам понадобится лемма [17, с. 136] об асимптотических свойствах функции типа Миттаг-Леффлера $E_\rho(z;\mu)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu+k\rho^{-1})}$.

Лемма 1. *Пусть $\rho>\frac{1}{2}$, μ — вещественная постоянная и α_1 — фиксированное число из интервала $\left(\frac{\pi}{2\rho},\, min\left\{\pi,\, \frac{\pi}{\rho}\right\}\right)$. Тогда справедливы следующие оценки:*

1. Если $|arg\, z|\le\alpha_1$ и $|z|\ge 0$, то

$$|E_\rho(z;\mu)|\le M_1\,(1+|z|)^{\rho(1-\mu)}\,e^{Re\, z^\rho}+\frac{M_2}{1+|z|},$$

2. Если $\alpha_1\le|arg\, z|\le\pi$ и $|z|\ge 0$, то

$$|E_\rho(z;\mu)|\le\frac{M_2}{1+|z|},$$

где M_1 и M_2 — постоянные, не зависящие от z.

Продолжим обоснование Метода Фурье.

Покажем, что ряд (15) и ряды производных $D_{0t}^{\alpha}u$, $D_{0t}^{\beta}u$, u_{xx}, $D_{0t}^{\gamma}u_{xx}$, которые получаются из него, будут равномерно сходиться.

Для доказательства равномерной сходимости ряда (15) получим следующее соотношение, при этом также будем использовать известные оценки коэффициентов Фурье [16, с. 647], свойства гамма-функции и формулу разложения тринома $(x+y+z)^n=$ $=\sum\limits_{s=0}^{n}\sum\limits_{l=0}^{n-s}\begin{pmatrix} n\\ s,l\end{pmatrix}x^s y^l z^{n-s-l}$:

$$|u_k|\le\left|\nu_k t^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^n\sum_{s=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-s}\begin{pmatrix} n\\ s,l\end{pmatrix}\frac{t^{n\alpha-l\alpha_1-s\alpha_2}}{\Gamma\left((n+1)\alpha-l\alpha_1-s\alpha_2\right)}\right|+$$

$$+\left|\tau_k t^{\alpha-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^n\sum_{s=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-s}\begin{pmatrix} n\\ s,l\end{pmatrix}\frac{t^{n\alpha-l\alpha_1-s\alpha_2}}{\Gamma\left((n+1)\alpha-l\alpha_1-s\alpha_2-1\right)}\right|\le$$

$$\le ct^{\alpha-1}\left|\nu_k\right|\left|\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^n\sum_{s=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-s}\begin{pmatrix} n\\ s,l\end{pmatrix}\frac{t^{n\alpha-l\alpha_1-s\alpha_2}}{\Gamma\left((n+1)\alpha-l_0\alpha_1-s_0\alpha_2\right)}\right|+$$

$$+ct^{\alpha-2}\left|\tau_k\right|\left|\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^n\sum_{s=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-s}\begin{pmatrix} n\\ s,l\end{pmatrix}\frac{t^{n\alpha-l\alpha_1-s\alpha_2}}{\Gamma\left((n+1)\alpha-l_1\alpha_1-s_1\alpha_2-1\right)}\right|\le$$

$$\le ct^{\alpha-1}\frac{M_3}{k^2}\left|\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^n\frac{\left(t^{\alpha}+t^{\alpha-\alpha_1}+t^{\alpha-\alpha_2}\right)^n}{\Gamma\left((n+1)\alpha-l_0\alpha_1-s_0\alpha_2\right)}\right|+$$

$$+ct^{\alpha-2}\frac{M_4}{k^2}\left|\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^n\frac{(t^\alpha+t^{\alpha-\alpha_1}+t^{\alpha-\alpha_2})^n}{\Gamma\left((n+1)\alpha-l_1\alpha_1-s_1\alpha_2-1\right)}\right|\le$$

$$=t^{\alpha-1}\frac{M_5}{k^2}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[-\lambda t^\alpha\left(1+t^{-\alpha_1}+t^{-\alpha_2}\right)\right]^n}{\Gamma\left((n+1)\alpha-l_0\alpha_1-s_0\alpha_2\right)}\right|+t^{\alpha-2}\frac{M_6}{k^2}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[-\lambda t^\alpha\left(1+t^{-\alpha_1}+t^{-\alpha_2}\right)\right]^n}{\Gamma\left((n+1)\alpha-l_1\alpha_1-s_1\alpha_2-1\right)}\right|=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(t^{\alpha-1}\frac{M_5}{k^2}\left|E_{\frac{1}{\alpha}}\left[-\lambda t^\alpha\left(1+t^{-\alpha_1}+t^{-\alpha_2}\right);\,\alpha-l_0\alpha_1-s_0\alpha_2\right]\right|+\right.$$

$$\left.+\,t^{\alpha-2}\frac{M_6}{k^2}\left|E_{\frac{1}{\alpha}}\left[-\lambda t^\alpha\left(1+t^{-\alpha_1}+t^{-\alpha_2}\right);\,\alpha-l_1\alpha_1-s_1\alpha_2-1\right]\right|\right),$$

где фиксированные s_i, $l_i\in\mathbb{N}$, $i=0,1$, такие, что

$$\frac{1}{\Gamma\left((n+1)\alpha-l_0\alpha_1-s_0\alpha_2\right)}=\max_{\substack{l=\overline{0,n-s}\\ s=\overline{0,n}}}\left\{\frac{1}{\Gamma\left((n+1)\alpha-l\alpha_1-s\alpha_2\right)}\right\},$$

$$\frac{1}{\Gamma\left((n+1)\alpha-l_1\alpha_1-s_1\alpha_2-1\right)}=\max_{\substack{l=\overline{0,n-s}\\ s=\overline{0,n}}}\left\{\frac{1}{\Gamma\left((n+1)\alpha-l\alpha_1-s\alpha_2-1\right)}\right\}.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(t^{\alpha-1}\frac{M_5}{k^2}\left|E_{\frac{1}{\alpha}}\left[-\lambda t^\alpha\left(1+t^{-\alpha_1}+t^{-\alpha_2}\right);\,\alpha-l_0\alpha_1-s_0\alpha_2\right]\right|+\right.$$

$$\left.+\,t^{\alpha-2}\frac{M_6}{k^2}\left|E_{\frac{1}{\alpha}}\left[-\lambda t^\alpha\left(1+t^{-\alpha_1}+t^{-\alpha_2}\right);\,\alpha-l_1\alpha_1-s_1\alpha_2-1\right]\right|\right).\tag{17}$$

Используя вторую оценку из леммы 1, получим

$$|u_k|\le\frac{M_5M_2t^{\alpha-1}}{k^2\left[1+\left|\lambda t^\alpha\left(1+t^{-\alpha_1}+t^{-\alpha_2}\right)\right|\right]}+\frac{M_6M_2t^{\alpha-2}}{k^2\left[1+\left|\lambda t^\alpha\left(1+t^{-\alpha_1}+t^{-\alpha_2}\right)\right|\right]}$$

Из сходимости мажорантного ряда, имеющего порядок $\frac{1}{k^4}$, следует и равномерная сходимость ряда (17), а значит и ряда (15) при $t\ge t_0>0$, где t_0 — любое число.

Равномерная сходимость рядов

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t)\sim\sum_{k=1}^{\infty}D_{0t}^{\alpha}u_k,\quad D_{0t}^{\beta}u(x,t)\sim\sum_{k=1}^{\infty}D_{0t}^{\beta}u_k,$$

$$u_{xx}(x,t)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2u_k}{\partial x^2},\quad D_{0t}^{\gamma}u_{xx}(x,t)\sim\sum_{k=1}^{\infty}D_{0t}^{\gamma}\frac{\partial^2u_k}{\partial x^2}$$

доказывается аналогично, и отсюда следует возможность почленного дифференцирования ряда (15) и применения обобщенного принципа суперпозиции, т. е. функция $u(x,t)$, определяемая рядом (15), удовлетворяет уравнению (3).

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\tau \in \mathbb{C}^3[0,1]$, $\nu \in \mathbb{C}^2[0,1]$ *и выполнены условия согласования* $\tau(0) = \tau(1) = \tau''(0) = \tau''(1) = 0$, $\nu(0) = \nu(1) = 0$, *тогда функция, определяемая рядом (15):*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\nu_k t^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n \sum_{s=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-s} \left(\begin{array}{c} n \\ s,l \end{array} \right) \frac{t^{n\alpha - l\beta - s\gamma}}{\Gamma\left((n+1)\alpha - l\beta - s\gamma\right)} + \right.$$

$$\left. + \tau_k t^{\alpha-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n \sum_{s=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-s} \left(\begin{array}{c} n \\ s,l \end{array} \right) \frac{t^{n\alpha - l\beta - s\gamma}}{\Gamma\left((n+1)\alpha - l\beta - s\gamma - 1\right)} \right) sin(\pi k x),$$

где $\tau_k = 2\int\limits_0^1 \tau(x) sin(\pi k x)dx$, $\nu_k = 2\int\limits_0^1 \nu(x) sin(\pi k x)dx$, $\lambda = \lambda_k = (\pi k)^2$, $1 < \alpha < 2$, $0 < \beta, \gamma < 1$, $\alpha > \beta > \gamma$, $\gamma \le \alpha - 1 \le \beta$, *представляет регулярное решение задачи 1.*

Список использованных источников

1. *Чудновский А. Ф.* Теплофизика почв. М.: Наука, 1976. 353 с.
2. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
3. *Кулик В. Я.* Исследование движения почвенной влаги с точки зрения инвариантности относительно непрерывных групп преобразований // В сб. «Исследование процессов обмена энергией и веществом в системе почва-растение-воздух». Л.: Наука, 1972. 315 с.
4. *Архестова С. М., Шхануков-Лафишев М. Х.* Разностные схемы для уравнения влагопереноса Аллера – Лыкова с нелокальным условием // Изв. КБНЦ РАН. 2012. Т. 3. С. 7–16.
5. *Лафишева М. М., Керефов М. А., Дышекова Р. В.* Разностные схемы для уравнения влагопереноса Аллера – Лыкова с нелокальным условием // Владикавказский математический журнал. 2017. Т. 19, вып. 1. С. 50–58.
6. *Геккиева С. Х.* Нелокальная краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера – Лыкова // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 24, № 4. С. 19–28.
7. *Керефов М. А., Нахушева Ф. М., Геккиева С. Х.* Краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера – Лыкова с сосредоточенной теплоемкостью // Вестн. СамУ. Естественнонаучн. сер. 2018. Т. 24. № 3. С. 23–29.
8. *Геккиева С. Х., Керефов М. А.* Краевая задача для нелокального уравнения влагопереноса Аллера – Лыкова // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2019. Т. 167. С. 27–33.
9. *Gekkieva S. Kh., Kerefov M. A.* Dirichlet boundary value problem for Aller – Lykov moisture transfer equation with fractional derivative in time. Ufa Math. J. 2019. Vol. 11. No. 2. Pp. 71–81.
10. *Керефов М. А., Геккиева С. Х.* Вторая краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера – Лыкова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23, № 4. С. 607–621.
11. *Керефов М. А., Геккиева С. Х.* Численно-аналитический метод решения краевой задачи для обобщенных уравнений влагопереноса // Вестн. Удмуртского университета. Математика. Механика. Комп. науки. 2021. Т. 31, № 1. С. 19–34.
12. *Геккиева С. Х., Керефов М. А., Нахушева Ф. М.* Локальные и нелокальные краевые задачи для обобщенного уравнения Аллера – Лыкова // Уфимск. матем. журн. 2023. Т. 15, Вып. 1. С. 22–34.
13. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Math. Stud. Vol. 204. Elsevier, Amsterdam, 2006. 499 p.

14. *Псху А. В.* Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Матем. сб. 2011. Т. 202, № 4. С. 111–122.
15. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
16. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 2, СПб.: БХВ-Петербург, 2008. 848 с.
17. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.

Поступила 23.01.2024; одобрена после рецензирования 07.03.2024; принята к публикации 15.03.2024.

Об авторах:

Геккиева Сакинат Хасановна, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела вычислительных методов, Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН (360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А), https://orcid.org/0000-0002-2135-2115, gekkieva_s@mail.ru

Керефов Марат Асланбиевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова (360004, Россия, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173), https://orcid.org/0000-0002-7442-5402, kerefov@mail.ru

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

References

1. *Chudnovskiy A. F.* Teplofizika pochv (Thermophysics of soils). Moscow: Nauka, 1976. 353 p.
2. *Nakhushev A. M.* Drobnoe ischislenie i ego primenenie (Fractional calculus and its applications). Moscow: Fizmatlit, 2003. 272 p.
3. *Kulik V. Ja.* Investigation of soil moisture movement from the point of view of invariance with respect to continuous transformation groups, Issledovanie processov obmena jenergiej I veshhestvom v sisteme pochva-rastenie-vozduh (Investigation of energy and substance exchange processes in the soil-plant-air system). Leningrad: Nauka, 1972. 315 p. (in Russian).
4. *Arkhestova S. M., Shkhanukov-Lafishev M. Kh.* Difference schemes for moisture transport equation of Aller-Lykov with non-local condition. Izvestiya KBNTs RAN. 2012. No. 3 (47). Pp. 7–16. https://elibrary.ru/item.asp?id=17822798 (in Russian)
5. *Lafisheva M. M., Kerefov M. A., Dyshekova R. V.* Difference schemes for the Aller – Lykov moisture transfer equations with a nonlocal condition. Vladikavkazskiy matematicheskiy zhurnal. 2017. Vol. 19, issue 1. Pp. 50–58. http://mi.mathnet.ru/vmj607 (in Russian)
6. *Gekkieva S. Kh.* Nonlocal boundary-value problem for the generalized Aller – Lykov moisture transport equation. Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki. 2018. No. 4 (24). Pp. 19–28. https://doi.org/10.18454/2079-6641-2018-24-4-19-28. (in Russian)
7. *Kerefov M. A., Nakhusheva F. M., Gekkieva S. Kh.* Boundary value problem for the Aller – Lykov moisture transport generalized equation with concentrated heat capacity, Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya. 2018. Vol. 24, No. 3. Pp. 23–29. https://elibrary.ru/item.asp?id=36731739. (in Russian)
8. *Gekkieva S. Kh., Kerefov M. A.* Boundary-value problem for the Aller–Lykov nonlocal moisture transfer equation. Proceedings of the IV International Scientific Conference "Actual Problems of Applied Mathematics". Kabardino-Balkar Republic, Nalchik, Elbrus Region, May 22–26. 2018. Part III, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz., 167, VINITI, Moscow, 2019. Pp. 27–33. https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-167-27-33

9. *Gekkieva S. Kh., Kerefov M. A.* First boundary value problem for the Aller-Lykov moisture transfer equation with a time-fractional derivative. Ufimskiy matematicheskiy zhurnal. 2019. Vol. 11, No. 2. Pp. 72–82. http://mi.mathnet.ru/ufa472. (in Russian)
10. *Kerefov M. A., Gekkieva S. Kh.* Second boundary-value problem for the generalized Aller – Lykov equation, Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskiye nauki. 2019. Vol. 23, No. 4. Pp. 607–621. https://doi.org/10.14498/vsgtu1686. (in Russian)
11. *Kerefov M. A., Gekkieva S. Kh.* Numerical-analytical method for solving boundary value problem for the generalized moisture transport equation. Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki. 2021. Vol. 23, No. 1. Pp. 19–34. https://doi.org/10.35634/vm210102. (in Russian)
12. *Gekkieva S. Kh., Kerefov M. A., Nakhusheva F. M.* Local and nonlocal boundary value problems for generalized Aller–Lykov equation. Ufimsk. Mat. Zh. 2023. Vol. 15, No. 1. Pp. 22–34. https://doi.org/10.13108/2023-15-1-21
13. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Math. Stud. Vol. 204. Elsevier, Amsterdam. 2006. 499 p.
14. *Pskhu A. V.* Initial-value problem for a linear ordinary differential equation of noninteger order. Mat. Sb. 2011. Vol. 202, No. 4. Pp. 111–122. https://doi.org/10.1070/SM2011v202n04ABEH004156
15. *Pskhu A. V.* Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka (Partial differential equations of fractional order). Moscow: Nauka, 2005. 199 p.
16. *Smirnov V. I.* Kurs vysshey matematiki (Higher Mathematics Course). Vol. 2. SPb.: BKhV-Peterburg, 2008. 848 p.
17. *Dzhrbashyan M. M.* Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funktsiy v kompleksnoy oblasti (Integral transformations and representations of functions in the complex domain). Moscow: Nauka, 1966. 672 p.

Submitted 23.01.2024; approved after reviewing 07.03.2024; accepted for publication 15.03.2024.

About the authors:

Sakinat Khasanovna Gekkieva, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher at the Department of Computational Methods, Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS (89A, Shortanova str., Nal'chik, 360000, Russian Federation), https://orcid.org/0000-0002-2135-2115, gekkieva_s@mail.ru

Marat Aslanbievich Kerefov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov (173, Chernyshevsogo str., Nal'chik, 360004, Russian Federation), https://orcid.org/0000-0002-7442-5402, kerefov@mail.ru

The authors have read and approved the final version of the manuscript.