МАТЕМАТИКА

УДК 517.5
DOI: 10.47928/1726-9946-2024-24-1-23-35
EDN: QFMIGO

Научная статья

Сильная аппроксимация функций двойными рядами Фурье в обобщённых гёльдеровых пространствах

Р. А. Ласурия, М. Р. Голава

Абхасзский государственный университет, г. Сухум, Республика Абхазия
rlasuria67@yandex.ru

Аннотация. Исследуются некоторые вопросы сильной аппроксимации функций двойными рядами Фурье в обобщённых гёльдеровых пространствах. Установлены точные по порядку оценки функционалов сильной суммируемости двойных рядов Фурье, а также их аппроксимационные свойства в указанных пространствах.

Ключевые слова: ряд Фурье, сильная аппроксимация, гёльдеровы пространства, наилучшее приближение.

Финансирование. Работа не выполнялась в рамках фондов.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Для цитирования. *Ласурия Р. А., Голава М. Р.* Сильная аппроксимация функций двойными рядами Фурье в обобщённых гёльдеровых пространствах // Доклады АМАН. 2024. Т. 24, № 1. С. 23–35. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2024-24-1-23-35; EDN: QFMIGO

MATHEMATICS

MSC 34A08, 34B05 Original article

Strong approximation of functions by double Fourier series in generalized Hölder spaces

Robert A. Lasuria, Mariana R. Golava

Abhaszsky state university, Sukhum, Republic Abkhazia
rlasuria67@yandex.ru

Abstract. We study some problems of strong approximation of the functions of double Fourier series in the generalized Holder spases. Order-accurate estimates for the strong summability functionals of double Fourier series are established, as wel as their approximation properties in the indicated spases.

Keywords: Fourier series, strong approximation, Holder spaces, best approximation.

Funding. The work was not carried out within the framework of funds.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

For citation. *Lasuria R. A., Golava M. R.* Strong approximation of functions by double Fourier series in generalized Hölder spaces. Adyghe Int. Sci. J. 2024. Vol. 24, No. 1. Pp. 23–35.
DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2024-24-1-23-35; EDN: QFMIGO

1. Обозначения и определения. Пусть $T := [-\pi, \pi]$, $T^2 = T \times T$, $C\left(T^2\right)$ – пространство непрерывных 2π-периодических по каждой из переменных x и y функций на квадрате периодов T^2 с нормой

$$\|f\|_C = \|f\|_{C(T^2)} := \max_{(x,y)\in T^2} |f(x,y)|,$$

$$S[f] := \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{ij} A_{ij}(f;x,y)$$

– двойной ряд Фурье функции f, где

$$\gamma_{ij} := \begin{cases} 1/4, & i = j = 0; \\ 1/2, & i > 0,\ j = 0 \ \vee \ i = 0,\ j > 0; \\ 1, & i > 0,\ j > 0\ , \end{cases}$$

$$A_{ij}(f;x,y) := a_{ij}(f)\cos ix\cos jy + b_{ij}(f)\sin ix\cos jy + c_{ij}(f)\cos ix\sin jy + d_{ij}(f)\sin ix\sin jy,$$

$$a_{ij}(f) := \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2} f(x,y)\cos ix\cos jy\,dxdy,$$

$$b_{ij}(f) := \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2} f(x,y)\sin ix\cos jy\,dxdy,$$

$$c_{ij}(f) := \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2} f(x,y)\cos ix\sin jy\,dxdy,$$

$$d_{ij}(f) := \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2} f(x,y)\sin ix\sin jy\,dxdy,$$

$$i, j \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, ...\}.$$

Пусть, далее, $r := \sqrt{h^2 + s^2}$, $h > 0$, $s > 0$, $\omega(r)$ – положительная и возрастающая по $r > 0$ функция.

$$\Delta_{hs} f(x,y) := f(x+h, y+s) - f(x,y),$$

$$H_\omega\left(T^2\right) := \left\{ f \in C\left(T^2\right) : |f|_{\omega(T^2)} := \sup_{r>0} \frac{\|\Delta_{hs} f\|_{C(T^2)}}{\omega(r)} < +\infty \right\}$$

– обобщённое гёльдерово пространство с нормой

$$\|f\|_\omega = \|f\|_{\omega(T^2)} := \|f\|_{C(T^2)} + |f|_{\omega(T^2)}.$$

В дальнейшем

$$\omega(f;t) := \sup_{\sqrt{h^2+s^2}\le t} \|\Delta_{hs} f\|_{C(T)^2}$$

– радиальный модуль непрерывности функции $f \in C\left(T^2\right)$,

$$E_{mn}\left(f\right) := \inf_{t_{mn}} \left\|f - t_{mn}\right\|_{C(T^2)}$$

– величина наилучшего приближения функции $f \in C\left(T^2\right)$ тригонометрическими полиномами не выше m относительно переменной x и не выше n относительно y.

2. Постановка задачи. Вопросы скорости сходимости различных методов суммирования рядов Фурье функций одной переменной в гёльдеровых пространствах и их обобщениях начали рассматривать З. Прёсдорф, Л. Лейндлер, Р. Мохопатра и П. Чандра, А. Мейер, В. Тотик [1]–[4]. Подробная библиография работ в этом направлении отражена в работе [5].

Рассмотрим последовательность функционалов сильной суммируемости рядов Фурье функций одной переменной вида

$$R_\nu^{n,(q)}\left(f;\alpha\right) = R_\nu^{n,(q)}\left(f;x;\alpha\right) := \left(\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k\left(\nu\right)\left|\rho_k\left(f,x\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}},\ q>0,\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{1}$$

где $\rho_n\left(f\right) = \rho_n\left(f;x\right) := f\left(x\right) - S_n\left(f;x\right)$, $S_n\left(f;x\right)$ – частичные суммы порядка n одномерного ряда Фурье, $\alpha = \left(\alpha_n\left(\nu\right)\right)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\nu \in V \subset \mathbb{R}$, – произвольная последовательность неотрицательных функций, заданных на множестве V. Пусть, далее,

$$H_\omega\left(T\right) := \left\{f \in C\left(T\right) : \left|f\right|_\omega := \sup_{h>0}\frac{\left\|\Delta_h f\right\|_{C(T)}}{\omega\left(h\right)} < +\infty\right\},$$

где $\Delta_h f\left(x\right) := f\left(x+h\right) - f\left(x\right)$, $\omega\left(t\right)$ – положительная и возрастающая при t >0 функция. $H_\omega(T)$ – банахово пространство относительно нормы

$$\left\|f\right\|_\omega := \left\|f\right\|_{C(T)} + \left|f\right|_\omega.$$

Аппроксимационные свойства величин, подобных (1) в пространстве $H_\omega\left(T\right)$ исследовались в работах [6]-[11] (см. также [5]). Так, в работе автора [8] установлен следующий результат.

Теорема А. *Пусть $0 \le \theta < 1$, $\alpha = \left(\alpha_k\left(\nu\right)\right)$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\nu \in V$ – последовательность неотрицательных функций, невозрастающая по k при каждом фиксированном $v \in V$, $\omega\left(t\right)$, $\omega^*\left(t\right)$ – положительные и возрастающие при $t>0$ функции. Тогда для каждой функции $f \in H_\omega\left(T\right) \subset H_{\omega^*}\left(T\right)$, для всех $q \ge 1$ и $n \in \mathbb{N}_0$ имеет место соотношение*

$$\left\|R_\nu^{n,(q)}\left(f;\alpha\right)\right\|_{\omega^*} = O\left(1\right)\sup_{h>0}\frac{\left(\omega\left(h\right)\right)^\theta}{\omega^*\left(h\right)}\times$$

$$\times\left\{\left(n+1\right)\alpha_n\left(\nu\right)\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{q(1-\theta)} + \sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k\left(\nu\right)\left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)^{q(1-\theta)}\right\}^{\frac{1}{q}}, \tag{2}$$

где O (1) – величина, равномерно ограниченная по $n \in \mathbb{N}_0$, $\nu \in V$ и зависящая, вообще говоря, от q, f, θ.

Если $\omega^*\left(t\right) = t^\gamma$, $0<\gamma\le 1$, $\omega\left(t\right) = t^\alpha$, $0<\alpha\le 1$, то $H_{\omega^*} := H_\gamma$, $H_\omega := H_\alpha$.

Следствие A ([5], [8]). Пусть $0 \le \gamma < \alpha \le 1$. Тогда для каждой функции $f \in H_\alpha$, для всех $q \ge 1$ и $n \in \mathbb{N}_0$ имеют место соотношения

$$\left\| \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left| \rho_k \left(f \right) \right|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \right\|_\gamma = \begin{cases} O\left(1\right) \frac{1}{(n+1)^{\alpha-\gamma}}, & \alpha - \gamma < \frac{1}{q}, \\ O\left(1\right) \left(\frac{\ln(n+1)}{n+1} \right)^{\alpha-\gamma}, & \alpha - \gamma = \frac{1}{q}, \\ O\left(1\right) \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{q}}}, & \alpha - \gamma > \frac{1}{q},\ q > 1. \end{cases} \tag{3}$$

$$\|f\|_\omega := \|f\|_\alpha.$$

Утверждение следствия A является усилением соответствующего результата из работы [11] (следствие 3.2) в отношении сильных средних арифметических с показателем $q \ge 1$.

Введем теперь в рассмотрение последовательность функционалов сильной суммируемости двойных рядов Фурье

$$R_{\mu\nu}^{mn,(q)} \left(f; \alpha \right) = R_{\mu\nu}^{mn,(q)} \left(f; x, y, \alpha \right) := \left(\sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} \alpha_{ij} \left(\mu, \nu \right) \left| \rho_{ij} \left(f; x, y \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}},\ q > 0, \tag{4}$$

где $(\mu, \nu) \in E \subset \mathbb{R}^2$, $\rho_{ij}(f) = \rho_{ij}(f; x, y) := f(x, y) - S_{ij}(f; x, y)$, $S_{mn}(f) = S_{mn}(f; x, y)$ – прямоугольные частичные суммы порядков m и n по переменным x и y соответственно.

Здесь ставится задача об исследовании аппроксимационных свойств величин (4) и установлении аналогов соотношений (2) и (3) для каждой функции из $H_\omega(T^2) \subset H_{\omega^*}(T^2)$ по норме пространства $H_{\omega^*}(T^2)$.

3. Предложения и вспомогательные утверждения. Приведем утверждение относительно включения $H_\omega(T^2) \subset H_{\omega^*}(T^2)$.

Предложение 1. *Пусть $\omega(r)$, $\omega^*(r)$ – положительные и возрастающие при $r > 0$ функции такие, что существуют постоянные $A > 0$ и $0 \le \theta < 1$, при которых*

$$\omega^\theta(r) \le A\omega^*(r).$$

Тогда справедливо включение $H_\omega(T^2) \subset H_{\omega^*}(T^2)$.

Доказательство. Пусть $f \in H_\omega(T^2)$, $r = \sqrt{h^2 + s^2}$. В принятых условиях имеем

$$\sup_{r>0} \frac{\|\Delta_{hs} f\|_C}{\omega^*(r)} \le \sup_{r>r_0} \frac{\|\Delta_{hs} f\|_C}{\omega^*(r)} + \sup_{r\le r_0} \frac{\|\Delta_{hs} f\|_C}{\omega^*(r)} \le$$

$$\le \frac{2\|f\|_C}{\omega^*(r_0)} + \sup_{r\le r_0} \frac{\|\Delta_{hs} f\|_C}{\omega^*(r)} \le \frac{2\|f\|_C}{\omega^*(r_0)} + \sup_{r\le r_0} \frac{\|\Delta_{hs} f\|_C}{\omega^*(r)} \cdot \frac{(\omega(r))^\theta (\omega(r))^{1-\theta}}{\omega(r)} \le$$

$$\le A_1 + A \sup_{r\le r_0} \frac{\|\Delta_{hs} f\|_p}{\omega(r)} \cdot (\omega(r_0))^{1-\theta} \le A_1 + A_2 = A_3 < +\infty.$$

Отсюда вытекает, что $f \in H_{\omega^*}(T^2)$.

Из предложения 1 следует, что если $\omega(r) = r^\alpha$, $\omega^*(r) = r^\gamma$, $r > 0$, $0 \le \gamma < \alpha \le 1$, $\theta = \frac{\gamma}{\alpha}$, то

$$\frac{(\omega(r))^\theta}{\omega^*(r)} = 1,$$

и, значит, $H_\alpha(T^2) \subset H_\gamma(T^2)$.

Приведём одно вспомогательное утверждение, не лишенное, по-видимому, и самостоятельного интереса.

Лемма 1. *Пусть $0 \le \theta < 1$. Тогда для каждой функции $f \in H_\omega(T^2)$ при всех $m, n \in \mathbb{N}_0$ и $q > 0$ справедливо неравенство*

$$\left\| \left(\frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i=m}^{2m} \sum_{j=n}^{2n} |\rho_{ij}(\Delta_{hs} f)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_C \le$$

$$C_q |f|_\omega (\omega(r))^\theta \left(\omega \left(\sqrt{\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} \right) \right)^{1-\theta}, \tag{5}$$

где $r = \sqrt{h^2 + s^2} > 0$, C_q – положительная постоянная, зависящая только от q.

Доказательство. Воспользуемся неравенством, установленным Л. Д. Гоголадзе [12]

$$\left\| \left(\frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i=m}^{2m} \sum_{j=n}^{2n} |\rho_{ij}(f)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_C \le$$

$$\le C_q E_{mn}(f), \ f \in C\left(T^2\right), \tag{6}$$

В силу известного неравенства Джексона [13, с. 136] ,

$$E_{mn}(f) \le C_1 \omega \left(f; \sqrt{\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} \right),$$

где C_1 – абсолютно положительная постоянная, вследствие (6) будем иметь

$$\left\| \left(\frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i=m}^{2m} \sum_{j=n}^{2n} |\rho_{ij}(f)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_C \le$$

$$\le C_{q,1} \omega \left(f; \sqrt{\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} \right). \tag{7}$$

Применяя оценку (7) к функции $\Delta_{hs} f$, находим

$$\left\| \left(\frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i=m}^{2m} \sum_{j=n}^{2n} |\rho_{ij}(\Delta_{hs} f)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_C \le$$

$$\le C_{q,1} \omega \left(\Delta_{hs} f; \sqrt{\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} \right). \tag{8}$$

Вследствие же неравенств

$$\omega\left(\Delta_{hs}f;\sqrt{u^2+v^2}\right)\le 2\|\Delta_{hs}f\|_C,$$

$$\omega\left(\Delta_{hs}f;\sqrt{u^2+v^2}\right)\le 2\omega\left(f;\sqrt{u^2+v^2}\right)$$

и условия $f\in H_\omega\left(T^2\right)$ получаем

$$\left\|\left(\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{i=m}^{2m}\sum_{j=n}^{2n}\left|\rho_{ij}\left(\Delta_{hs}f\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_C\le 2C_{q,1}\|\Delta_{hs}f\|_C\le 2C_{q,1}|f|_\omega\omega\left(r\right),\ \mathrm{r}{=}\sqrt{h^2+s^2}, \tag{9}$$

и, значит,

$$\left\|\left(\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{i=m}^{2m}\sum_{j=n}^{2n}\left|\rho_{ij}\left(\Delta_{hs}f\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_C\le 2C_{q,1}\omega\left(f;\sqrt{\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}\right)\le$$

$$\le 2C_{q,1}|f|_\omega\omega\left(\sqrt{\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}\right). \tag{10}$$

Стало быть, на основании (9), (10) из (8) окончательно получаем

$$\left\|\left(\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{i=m}^{2m}\sum_{j=n}^{2n}\left|\rho_{ij}\left(\Delta_{hs}f\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_C\le$$

$$C_q|f|_\omega(\omega\left(r\right))^\theta\left(\omega\left(\sqrt{\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}\right)\right)^{1-\theta}.$$

Лемма 1 доказана.

4. Основные результаты и следствия. Обозначим

$$K\left(f,\omega,\omega^*,q,\theta\right):=C_q\|f\|_\omega\left(2^\theta+\sup_{r>0}\frac{(\omega\left(r\right))^\theta}{\omega^*\left(r\right)}\right),\ r=\sqrt{h^2+s^2}. \tag{11}$$

Сформулируем утверждение, содержащее оценку нормы величин $R_{\mu\nu}^{mn,(q)}\left(f;\alpha\right)$, определяемых равенством (4), в метрике пространства $H_{\omega^*}\left(T^2\right)$, где $f\in H_\omega\left(T^2\right)$.

Теорема 1. *Пусть* $0\le\theta<1$, $\alpha=(\alpha_{ij})=(\alpha_{ij}\left(\mu,\nu\right))$, $i,j\in\mathbb{N}_0$, $(\mu,\nu)\in E\subset\mathbb{R}^2$ *– двойная последовательность неотрицательных функций, удовлетворяющая в каждой фиксированной точке* $(\mu,\nu)\in E$ *условиям*

$$\alpha_{ij}-\alpha_{(i+1)j}\ge 0,\ \alpha_{ij}-\alpha_{i(j+1)}\ge 0,\ i,j\in\mathbb{N}_0. \tag{12}$$

Тогда для каждой функции $f\in H_\omega\left(T^2\right)\subset H_{\omega^*}\left(T^2\right)$ *при всех* $m,n\in\mathbb{N}_0$ *и* $q\ge 1$ *имеет* *место неравенство*

$$\left\|R_{\mu\nu}^{mn,(q)}\left(f;\alpha\right)\right\|_{\omega^*} \le K\left(f,\omega,\omega^*,q,\theta\right)\times$$

$$\times\left\{\left(m+1\right)\left(n+1\right)\alpha_{nm}\left(\omega\left(\sqrt{\frac{1}{\left(m+1\right)^2}+\frac{1}{\left(n+1\right)^2}}\right)\right)^{q(1-\theta)}+\right.$$

$$+\left(m+1\right)\sum_{j=n}^{\infty}\alpha_{mj}\left(\omega\left(\sqrt{\frac{1}{\left(m+1\right)^2}+\frac{1}{\left(j+1\right)^2}}\right)\right)^{q(1-\theta)}+$$

$$+\left(n+1\right)\sum_{i=m}^{\infty}\alpha_{in}\left(\omega\left(\sqrt{\frac{1}{\left(i+1\right)^2}+\frac{1}{\left(n+1\right)^2}}\right)\right)^{q(1-\theta)}$$

$$\left.+\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}\alpha_{ij}\left(\omega\left(\sqrt{\frac{1}{\left(i+1\right)^2}+\frac{1}{\left(j+1\right)^2}}\right)\right)^{q(1-\theta)}\right\}^{\frac{1}{q}}, \qquad (13)$$

где $K\left(f,\omega,\omega^*,q,\theta\right)$ *– множитель, определенный равенством (11).*

Доказательство. Оценим величину

$$\left\|R_{\mu\nu}^{mn,(q)}\left(f;\alpha\right)\right\|_{\omega^*} = \left\|R_{\mu\nu}^{mn,(q)}\left(f;\alpha\right)\right\|_{C} + \sup_{r>0}\frac{\left\|\Delta_{hs}R_{\mu\nu}^{mn,(q)}\left(f;\alpha\right)\right\|_{C}}{\omega\left(r\right)}, \qquad (14)$$

где $r=\sqrt{h^2+s^2}$.

Применяя известное неравенство

$$\left|\left\|a\right\|_{l_q}-\left\|b\right\|_{l_q}\right| \le \left\|a-b\right\|_{l_q},\ q\ge 1,$$

где

$$l_q := \left\{a=a_{ij} : \left\|a\right\|_{l_q} := \left(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left|a_{ij}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} < +\infty\right\},$$

с учетом условий (12), получаем

$$\left\|\Delta_{hs}R_{\mu\nu}^{mn,(q)}\left(f;x,\alpha\right)\right\|_{p} \le \left\{\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}\alpha_{ij}\left|\rho_{ij}\left(f;x+h,y+s\right)-\rho_{ij}\left(f;x,y\right)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left\{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=2^k m}^{2^{k+1}m}\sum_{j=2^l n}^{2^{l+1}n}\alpha_{ij}\left|\rho_{ij}\left(\Delta_{hs}f;x,y\right)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

В силу леммы 1 имеем

$$\left|\Delta_{hs}R_{\mu\nu}^{mn,(q)}\left(f;x,y;\alpha\right)\right| \le$$

$$\leq \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{(2^k m)(2^l n)} \left(2^k m + 1\right) \left(2^l n + 1\right) \left(C_q \left| f \right| \left(\omega\left(r\right)\right)^{\theta} \left(\omega \left(\sqrt{\frac{1}{\left(m+1\right)^2} + \frac{1}{\left(n+1\right)^2}} \right) \right)^{1-\theta} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}} =$$

$$\leq C_q \left| f \right| \omega(\omega\left(r\right))^{\theta} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{(2^k m)(2^l n)} \left(2^k m + 1\right) \left(2^l n + 1\right) \left(\omega \left(\sqrt{\frac{1}{\left(m+1\right)^2} + \frac{1}{\left(n+1\right)^2}} \right) \right)^{q(1-\theta)} \right\}^{\frac{1}{q}} =$$

$$= C_q |f|_{\omega} (\omega\left(r\right))^{\theta} \left\{ \left(m+1\right)\left(n+1\right) \alpha_{mn} \left(\omega \left(\sqrt{\frac{1}{\left(m+1\right)^2} + \frac{1}{\left(n+1\right)^2}} \right) \right)^{q(1-\theta)} + \right.$$

$$+ \left(m+1\right) \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{m\left(2^l n\right)} \left(\omega \left(\sqrt{\frac{1}{\left(m+1\right)^2} + \frac{1}{\left(2^l n+1\right)^2}} \right) \right)^{q(1-\theta)} \left(2^{l-1} n + 1\right) +$$

$$+ \left(n+1\right) \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{\left(2^k m\right) n} \left(\omega \left(\sqrt{\frac{1}{\left(2^k m+1\right)^2} + \frac{1}{\left(n+1\right)^2}} \right) \right)^{q(1-\theta)} \left(2^{k-1} m + 1\right) +$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{\left(2^k m\right)\left(2^l n\right)} \left(\omega \left(\sqrt{\frac{1}{\left(2^k m+1\right)^2} + \frac{1}{\left(2^l n+1\right)^2}} \right) \right)^{q(1-\theta)} \left(2^{k-1} m + 1\right) \left(2^{l-1} n + 1\right) \right\}^{\frac{1}{q}} =$$

$$= C_q |f|_{\omega} (\omega\left(r\right))^{\theta} \left\{ \left(m+1\right)\left(n+1\right) \alpha_{mn} \left(\omega \left(\sqrt{\frac{1}{\left(m+1\right)^2} + \frac{1}{\left(n+1\right)^2}} \right) \right)^{q(1-\theta)} + \right.$$

$$+ \left(m+1\right) \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=2^{l-1} n}^{2^l n} \alpha_{m\left(2^l n\right)} \left(\omega \left(\sqrt{\frac{1}{\left(m+1\right)^2} + \frac{1}{\left(2^l n+1\right)^2}} \right) \right)^{q(1-\theta)} +$$

$$+ \left(n+1\right) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=2^{k-1} m}^{2^k m} \alpha_{\left(2^k m\right) n} \left(\omega \left(\sqrt{\frac{1}{\left(2^k m+1\right)^2} + \frac{1}{\left(n+1\right)^2}} \right) \right)^{q(1-\theta)} +$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=2^{k-1} m}^{2^k m} \sum_{j=2^{l-1} n}^{2^l n} \alpha_{\left(2^k m\right)\left(2^l n\right)} \left(\omega \left(\sqrt{\frac{1}{\left(2^k m+1\right)^2} + \frac{1}{\left(2^l n+1\right)^2}} \right) \right)^{q(1-\theta)} \right\}^{\frac{1}{q}} =$$

$$= C_q |f|_{\omega} (\omega\left(r\right))^{\theta} \left\{ \left(m+1\right)\left(n+1\right) \alpha_{mn} \left(\omega \left(\sqrt{\frac{1}{\left(m+1\right)^2} + \frac{1}{\left(n+1\right)^2}} \right) \right)^{q(1-\theta)} + \right.$$

$$+ \left(m+1\right) \sum_{j=n}^{\infty} \alpha_{mj} \left(\omega \left(\sqrt{\frac{1}{\left(m+1\right)^2} + \frac{1}{\left(j+1\right)^2}} \right) \right)^{q(1-\theta)} + \left(n+1\right) \sum_{i=m}^{\infty} \alpha_{in} \left(\omega \left(\sqrt{\frac{1}{\left(i+1\right)^2} + \frac{1}{\left(n+1\right)^2}} \right) \right)^{q(1-\theta)} +$$

$$\left. + \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} \alpha_{ij} \left(\omega \left(\sqrt{\frac{1}{\left(i+1\right)^2} + \frac{1}{\left(j+1\right)^2}} \right) \right)^{q(1-\theta)} \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Вследствие этого получаем

$$\left\|R_{\mu\nu}^{mn,(q)}(f;\alpha)\right\|_{\omega^*} \leq C_q|f|_\omega \sup_{r>0}\frac{(\omega(r))^\theta}{\omega^*(r)}\times$$

$$\times\left\{(m+1)(n+1)\alpha_{mn}\left(\omega\left(\sqrt{\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}\right)\right)^{q(1-\theta)}+\right.$$

$$+(m+1)\sum_{j=n}^{\infty}\alpha_{mj}\left(\omega\left(\sqrt{\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(j+1)^2}}\right)\right)^{q(1-\theta)}+$$

$$+(n+1)\sum_{i=m}^{\infty}\alpha_{in}\left(\omega\left(\sqrt{\frac{1}{(i+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}\right)\right)^{q(1-\theta)}+$$

$$\left.+\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}\alpha_{ij}\left(\omega\left(\sqrt{\frac{1}{(i+1)^2}+\frac{1}{(j+1)^2}}\right)\right)^{q(1-\theta)}\right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{15}$$

С помощью аналогичных рассуждений, учитывая (7) находим

$$\left\|R_{\mu\nu}^{mn,(q)}(f;\alpha)\right\|_C \leq C_q\left\{(m+1)(n+1)\alpha_{mn}\left(\omega\left(f;\sqrt{\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}\right)\right)^q+\right.$$

$$+(m+1)\sum_{j=n}^{\infty}\alpha_{mj}\left(\omega\left(f;\sqrt{\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(j+1)^2}}\right)\right)^q+$$

$$+(n+1)\sum_{i=m}^{\infty}\alpha_{in}\left(\omega\left(f;\sqrt{\frac{1}{(i+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}\right)\right)^q+$$

$$\left.+\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}\alpha_{ij}\left(\omega\left(f;\sqrt{\frac{1}{(i+1)^2}+\frac{1}{(j+1)^2}}\right)\right)^q\right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{16}$$

Вследствие неравенств

$$\omega\left(f;\sqrt{u^2+v^2}\right)_p \leq 2\|f\|_C,$$

$$\omega\left(f;\sqrt{u^2+v^2}\right) \leq |f|_\omega\omega\left(\sqrt{u^2+v^2}\right),$$

где $f \in H_\omega(T^2)$, из (16) получаем

$$\left\|R_{\mu\nu}^{mn,(q)}(f;\alpha)\right\|_C \leq C_q 2^\theta\|f\|_\omega\left\{(m+1)(n+1)\alpha_{mn}\left(\omega\left(\sqrt{\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}\right)\right)^{q(1-\theta)}+\right.$$

$$+(m+1)\sum_{j=n}^{\infty}\alpha_{mj}\left(\omega\left(\sqrt{\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(j+1)^2}}\right)\right)^{q(1-\theta)}+$$

$$+(n+1)\sum_{i=m}^{\infty}\alpha_{in}\left(\omega\left(\sqrt{\frac{1}{(i+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}\right)\right)^{q(1-\theta)}+$$

$$\left.+\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}\alpha_{ij}\left(\omega\left(\sqrt{\frac{1}{(i+1)^2}+\frac{1}{(j+1)^2}}\right)\right)^{q(1-\theta)}\right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{17}$$

Сопоставляя соотношения (15), (17) с (14), окончательно приходим к соотношению (13). Теорема 1 доказана.

Полагая в соотношении (13) $m=0$, $n=0$, $R_{\mu\nu}^{(q)}(f;\alpha):=R_{\mu\nu}^{00,(q)}(f;\alpha)$ получаем такое утверждение.

Следствие 1. *Пусть $0\le\theta<1$ и последовательность α удовлетворяет условиям (12). Тогда для каждой функции $f\in H_\omega(T^2)\subset H_{\omega^*}(T^2)$, при всех $q\ge 1$ справедливо неравенство*

$$\left\|R_{\mu\nu}^{(q)}(f;\alpha)\right\|_{\omega^*}\le K(f,\omega,\omega^*,q,\theta)\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{ij}(\mu,\nu)\left(\omega\left(\sqrt{\frac{1}{(i+1)^2}+\frac{1}{(j+1)^2}}\right)\right)^{q(1-\theta)}\right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{18}$$

Пусть теперь

$$\alpha=\alpha_{ij}(m+1,n+1):=\begin{cases}\frac{1}{(m+1)(n+1)}, & 0\le i\le m;\ 0\le j\le n,\\ 0, & i>m,\ j>n.\end{cases}$$

В этом случае для сильных средних арифметических с показателем $q\ge1$ для каждой функции $f\in H_\omega(T^2)\subset H_{\omega^*}(T^2)$ из (18) получаем оценку

$$\left\|\left(\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}|\rho_{ij}(f)|\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_{\omega^*}\le$$

$$\le K(f,\omega,\omega^*,q,\theta)\left\{\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\left(\omega\left(\sqrt{\frac{1}{(i+1)^2}+\frac{1}{(j+1)^2}}\right)\right)^{q(1-\theta)}\right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{19}$$

Если же $\alpha=\alpha_{ij}(\mu,\nu)=(1-\mu)(1-\nu)\mu^i\nu^j$, $0<\mu<1$, $0<\nu<1$, то из (18) следует соответствующая оценка для сильных средних Абеля – Пуассона.

Пусть, далее, $\theta=\frac{\gamma}{\alpha}$. Тогда в случае пространств Липшица – Гёльдера $H_\gamma(T^2)$ для сильных средних арифметических на основании неравенства (19) получаем такое утверждение.

Следствие 2. *Пусть* $0 \leq \gamma < \alpha \leq 1$, $q \geq 1$. *Тогда для каждой функции* $f \in H_\alpha\left(T^2\right)$ *имеют место соотношения*

$$\left\| \left(\frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \left|\rho_{ij}(f)\right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_\gamma = \begin{cases} O(1) \left(\sqrt{\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} \right)^{\alpha-\gamma}, \ \alpha - \gamma < 1, \\ O(1) \left(\sqrt{\left(\frac{\ln(m+1)}{m+1} \right)^2 + \left(\frac{\ln(n+1)}{n+1} \right)^2} \right)^{\alpha-\gamma}, \ \alpha - \gamma = \frac{1}{q}, \\ O(1) \left(\sqrt{\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} \right)^{\frac{1}{q}}, \ \alpha - \gamma > \frac{1}{q}, \ (q > 1). \end{cases}$$

Замечание. Все определения и утверждения данной работы сохраняют силу и в N-мерном случае при $N > 2$ и доказываются аналогичным образом.

Список использованных источников

1. *Prössdorf S.* Zur Konvergens der Fourierreihen Hölderstetiger. Math. Nachr. 1975. Vol. 69. Pp. 7–14.
2. *Leindler L.* Generalizations of Prössdorf's theorems. Stud. Math. Hung. 1979. Vol. 14. Pp. 431–439.
3. *Mohapatra R., Chandra P.* Degree of approximation of functions in the Hölder metric. Acta Math. Hung. 1983. Vol. 41, No. 1–2. Pp. 67–74.
4. *Leindler L., Meir A., Totik V.* On approximations of continuous functions in Lipshitz norms. Acta Math. Hung. 1985. Vol. 45, No. 3–4. Pp. 441–443.
5. *Ласурия Р. А.* Аппроксимация и группы отклонений рядов Фурье в обобщенных гёльдеровых пространствах // АГУ, К.: МИТРА, 2017. 288 с.
6. *Gorzenska M., Lesiniewicz M., Rempulska L.* Strong approximation of functions in Hölder spaces. Acta Sci. Math. (Szeged). 1993. Vol. 58. Pp. 233–241.
7. *Gorzenska M., Lesiniewicz M., Rempulska L.* Strong approximation in Hölder norms. Math. Nach. 1994. Vol. 170. Pp. 127–132.
8. *Ласурия Р. А.* Оценки группы уклонений в обобщённой гёльдеровой метрике // Укр. мат. журн. 2001. Вып. 53, № 9. С. 1210–1217.
9. *Ласурия Р. А.* Группы отклонений рядов Фурье в обобщенных гёльдеровых пространствах // Укр. мат. журн. 2016. Вып. 68, № 8. С. 1056–1067.
10. *Szal B.* On the strong approximation by matrix mean in the generalized Hölder metric. Rendiconti del Circ. / Math. di Polermo. 2007. Vol. 56, No. 2. Pp. 287–304.
11. *Szal B.* On the rate of strong summability by matrix means in the generalized Hölder metric. J. of inequal in pure and appl. Math. 2008. Vol. 9, No. 1. Pp. 1–27.
12. *Гоголадзе Л. Д* О сильном суммировании простых и кратных тригонометрических рядов Фурье. Некоторые вопросы теории функций. Тб. ун-т. 1981. С. 5–30
13. *Тиман М.Ф.* Аппроксимация и свойства периодических функций. К.: Наук. думка, 2009. 376 с.

Поступила 05.12.2023; одобрена после рецензирования 21.02.2024; принята к публикации 01.03.2024.

Об авторах:

Ласурия Роберт Андреевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент АНУ, профессор, Лауреат Государственной премии им. Г. А. Дзидзария в области естественных наук, заслуженный работник Высшей школы Республики Абхазия, ORCID: 0000-0003-2388-6070, rlasuria67@yandex.ru

Голава Мариана Рамиковна, преподаватель, соискатель кафедры математического анализа, физико-математического факультета, Абхазский государственный университет (г. Сухум, Республика Абхазия), ORCID: 0000-0002-8704-6444, marianagolava@yandex.ru

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

References

1. *Prössdorf S.* Zur Konvergens der Fourierreihen Hölderstetiger. Math. Nachr. 1975. Vol. 69. Pp. 7–14.
2. *Leindler L.* Generalizations of Prössdorf's theorems. Stud. Math. Hung. 1979. Vol. 14. Pp. 431–439.
3. *Mohapatra R., Chandra P.* Degree of approximation of functions in the Hölder metric. Acta Math. Hung. 1983. Vol. 41, No. 1–2. Pp. 67–74.
4. *Leindler L., Meir A., Totik V.* On approximations of continuous functions in Lipshitz norms. Acta Math. Hung. 1985. Vol. 45, No. 3–4. P. 441–443.
5. *Lasuria R. A.* Approksimaciya i gruppy otklonenij ryadov Fur'e v obobshchennyh gyol'derovyh prostranstvah [Approximation and deviation groups of Fourier series in generalized Hölder spaces]. AGU, K.: MITRA, 2017. 288 p. (in Russian)
6. *Gorzenska M., Lesiniewicz M., Rempulska L.* Strong approximation of functions in Hölder spaces. Acta Sci. Math. (Szeged). 1993. Vol. 58. P. 233–241.
7. *Gorzenska M., Lesiniewicz M., Rempulska L.* Strong approximation in Hölder norms. Math. Nach. 1994. Vol. 170. Pp. 127–132.
8. *Lasuria R. A.* Estimates of the evasion group in the generalized Hölder metric. Ukr. mat. zhurn. 2001. Vol. 53, No. 9. Pp. 1210–1217. (in Russian)
9. *Lasuria R. A.* Deviation groups of Fourier series in generalized Hölder spaces. Ukr. mat. jurn. 2016. Vol. 68, No. 8. Pp. 1056–1067. (in Russian)
10. *Szal B.* On the strong approximation by matrix mean in the generalized Hölder metric. Rendiconti del Circ. / Math. di Polermo. 2007. Vol. 56, No. 2. Pp. 287–304.
11. *Szal B.* On the rate of strong summability by matrix means in the generalized Hölder metric. J. of inequal in pure and appl. Math. 2008. Vol. 9, No. 1. Pp. 1–27.
12. *Gogoladze L. D.* On strong summation of simple and multiple trigonometric Fourier series. Some questions of the theory of functions. Tb. un. university. 1981. Pp. 5–30. (in Russian)
13. *Timan M. F.* Approksimaciya i svojstva periodicheskih funkcij [Approximation and properties of periodic functions]. K.: Nauk. Dumka, 2009. 376 p.

Submitted 05.12.2023; approved after reviewing 21.02.2024; accepted for publication 01.03.2024.

About the authors:

Robert Andreevich Lasuriya, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Corresponding Member of the Academy of Sciences of Ukraine, Professor, Laureate of the State Prize named after G.A. Dzidzarya in the field of natural sciences, honored worker of the Higher School of the Republic of Abkhazia, ORCID: 0000-0003-2388-6070, rlasuria67@yandex.ru

Mariana Ramikovna Golava, Teacher, competitor of the Department of Mathematical Analysis, Physics and Mathematics Faculty, Abhaszsky state university, Sukhum, the Republic of Abkhazia, ORCID: 0000-0002-8704-6444, marianagolava@yandex.ru

The authors have read and approved the final version of the manuscript.