МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.6
DOI: 10.47928/1726-9946-2024-24-4-34-38
EDN: JTOCFS

Научная статья

К вопросу единственности решения задачи Дезина для уравнения параболо-гиперболического типа с граничными условиями первого рода

Р. А. Киржинов

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, г. Нальчик, Россия
kirzhinov.r@mail.ru

Аннотация. В прямоугольной области для неоднородного модельного уравнение смешанного параболо-гиперболического типа исследуется задача Дезина с краевыми условиями первого рода. Требуется найти решение указанного уравнения, удовлетворяющее внутренне-краевому условию, связывающему значение искомой функции на линии изменения типа уравнения со значением нормальной производной на границе в области гиперболичности, и граничным условиям первого рода, задающим значение искомой функции на границе прямоугольной области. Решение задачи ищется в виде суммы ряда Фурье по ортонормированной системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. Доказана теорема единственности решения. В случае нарушения условия единственности, приведён пример нетривиального решения однородной задачи и получено необходимое и достаточное условие существования решения неоднородной задачи.

Ключевые слова: задача Дезина, краевые условия первого рода, уравнение параболо-гиперболического типа, уравнение смешанного типа.

Финансирование. Работа выполнена в рамках гос. задания Минобрнауки РФ по проекту: Краевые задачи и задачи управления для основных и смешанного типов уравнений и их применение к исследованию систем с распределёнными параметрами (1021032421196-2).

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Для цитирования. *Киржинов Р. А.* К вопросу единственности решения задачи Дезина для уравнения параболо-гиперболического типа с граничными условиями первого рода // Доклады АМАН. 2024. Т. 24, № 4. С. 34–38.
DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2024-24-4-34-38; EDN: JTOCFS

MATHEMATICS

MSC 35M10 Original article

On solution uniqueness for Dezin problem for parabolic-hyperbolic type equation with boundary conditions of the first kind

Romazan A. Kirzhinov

Institute of Applied Mathematics and Automation of KBSC RAS, Nalchik, Russia
kirzhinov.r@mail.ru

Abstract. In this paper considered an inhomogeneous second-order parabolic-hyperbolic mixed type equation, represented as one-dimensional heat equation in the parabolic part and the one-dimensional wave equation in the hyperbolic part. For the equation, a Dezin problem with boundary conditions of the first kind is investigated, which means to find a solution to the equation that satisfies inner-boundary condition, relating the value of the desired function on the equation type change line to the value of the normal derivative on the hyperbolicity region boundary, and boundary conditions of the first kind. It is established a criterion for the solution uniqueness to the problem. In case when the uniqueness criterion is violated, an example of a nontrivial solution to a homogeneous problem is given, and is obtained a necessary and sufficient condition for the existence of a solution to an inhomogeneous problem.

Keywords: Dezin problem, boundary conditions of the first kind, parabolic-hyperbolic type equation, mixed type equation.

Funding. This work was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation under the project: Boundary value and control problems for basic and mixed types of equations and their application to the study of systems with distributed parameters (1021032421196-2).

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author participated in the writing of the article and is fully responsible for submitting the final version of the article to the press.

For citation. *Kirzhinov R. A.* On solution uniqueness for Dezin problem for parabolic-hyperbolic type equation with boundary conditions of the first kind. Adyghe Int. Sci. J. 2024. Vol. 24, No. 4. Pp. 34–38. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2024-24-4-34-38; EDN: JTOCFS

Пусть $\Omega = \{(x,\,y)\colon 0 < x < r,\ -\alpha < y < \beta\}$ – область евклидовой плоскости точек $(x,\,y)$; $\Omega^- = \Omega \cap \{(x,\,y)\colon y < 0\}$; $r,\ \alpha,\ \beta$ – вещественные положительные числа.

В области Ω для уравнения

$$\begin{cases} u_{xx}(x,\,y) - u_y(x,\,y) = f^+(x,\,y), & y > 0,\\ u_{xx}(x,\,y) - u_{yy}(x,\,y) = f^-(x,\,y), & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $u(x,\,y)$ – неизвестная функция, $f^+(x,\,y)$, $f^-(x,\,y)$ – заданные функции, исследуется

Задача 1. *Найти решение $u(x,\,y)$ уравнения (1) из класса $C^1\big(\overline{\Omega}\big) \cap C_x^2(\Omega) \cap C_y^2(\Omega^-)$, удовлетворяющее условиям*

$$u_y(x,\,-\alpha) = \lambda\, u(x,\,0), \qquad 0 \leqslant x \leqslant r, \tag{2}$$

$$u(0,\,y) = u(r,\,y) = 0, \qquad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta, \tag{3}$$

где λ – заданное вещественное число.

Условие (2) есть условие А. А. Дезина [1, п. 1.6]. Задача 1 была исследована в [2, гл. 4, п. 4.6], [3] с нелокальными условиями периодичности $u(0,\,y) = u(r,\,y)$, $u_x(0,\,y) = u_x(r,\,y)$ вместо условия (3). Отметим также работы [4]–[6], посвящённые исследованию задачи А. А. Дезина для различных уравнений эллиптико-гиперболического типа.

Пусть существует решение $u(x,\,y)$ задачи 1. По аналогии с работой [7], рассмотрим функции

$$u_k(y) = \sqrt{\frac{2}{r}}\int\limits_0^r u(x,y)\,\sin\mu_k\,x\,dx, \tag{4}$$

где $\mu_k = \pi k/r,\ k \in \mathbb{N}$.

С учётом класса, в котором ищется решение $u(x,\,y)$, уравнения (1), условия (3) и полноты в пространстве $L_2\,[0,r]$ ортонормированной системы функций (см., напр., [8, гл. 11, § 3, п. 1])

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{r}}\,\sin\frac{\pi k}{r}x\right\}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

из (4) находим (см. [3])

$$u_k(y) = \begin{cases} a_k\,e^{-\mu_k^2 y} - \displaystyle\int\limits_0^y f_k^+(\eta)\,e^{-\mu_k^2(y-\eta)}\,d\eta, & y > 0,\\ a_k\,(\cos\mu_k y - \mu_k\sin\mu_k y) - & \\ \quad - f_k^+(0)\dfrac{\sin\mu_k y}{\mu_k} - \displaystyle\int\limits_y^0 f_k^-(\eta)\frac{\sin\mu_k\,(\eta - y)}{\mu_k}\,d\eta, & y < 0, \end{cases} \tag{6}$$

где a_k – произвольные постоянные, $f_k^+(y) = \sqrt{\frac{2}{r}}\int\limits_0^r f^+(x,y)\,\sin\mu_k\,x\,dx,\ f_k^-(y) = \sqrt{\frac{2}{r}}\int\limits_0^r f^-(x,y)\times$ $\times\sin\mu_k\,x\,dx$.

Из (4) и (6), пользуясь условием (2), получаем:

$$\left(\mu_k^2 \cos \mu_k \alpha - \mu_k \sin \mu_k \alpha + \lambda\right) a_k = -f_k^+(0) \cos \mu_k \alpha + \int\limits_{-\alpha}^{0} f_k^-(\eta) \cos \mu_k (\eta + \alpha)\, d\eta. \tag{7}$$

Пусть

$$\delta_k = \mu_k^2 \cos \mu_k \alpha - \mu_k \sin \mu_k \alpha + \lambda \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

тогда из (7) находим

$$a_k = -f_k^+(0) \frac{\cos \mu_k \alpha}{\delta_k} + \int\limits_{-\alpha}^{0} f_k^-(\eta) \frac{\cos \mu_k (\eta + \alpha)}{\delta_k}\, d\eta. \tag{9}$$

Выясним, при каких α, λ, r и k выражение $\delta_k = 0$. Представим δ_k в следующем виде:

$$\delta_k = \sqrt{\mu_k^4 + \mu_k^2} \sin\left(\operatorname{arctg} \mu_k - \mu_k \alpha\right) + \lambda. \tag{10}$$

Из представления (10) видно, что $\delta_k = 0$ только в том случае, когда $\frac{|\lambda|}{\sqrt{\mu_k^4 + \mu_k^2}} \leqslant 1, \quad k \in \mathbb{N}$ и $\alpha = \frac{1}{\mu_k}\left[\operatorname{arctg} \mu_k + (-1)^n \arcsin \frac{\lambda}{\sqrt{\mu_k^4 + \mu_k^2}} + \pi n\right], \quad n \in \mathbb{Z}$.

Пусть при некоторых значениях α, λ и $k = p \in \mathbb{N}$ нарушено условие (8), тогда a_p может принимать любое значение и однородная задача, соответствующая задаче 1 при $f^+(x,\, y) \equiv f^-(x,\, y) \equiv 0$, имеет нетривиальное решение вида

$$u_p(x,y) = \begin{cases} a_p \sin \mu_p x\, e^{-\mu_p^2 y}, & 0 \leqslant y \leqslant \beta, \\ a_p \sin \mu_p x \left(\cos \mu_p y - \mu_p \sin \mu_p y\right), & -\alpha \leqslant y \leqslant 0, \end{cases}$$

причём, неоднородная задача 1 будет иметь решение только в том случае, когда для $f^+(x,\, y)$, $f^-(x,\, y)$ выполнено условие

$$f_p^+(0) \cos \mu_p \alpha = \int\limits_{-\alpha}^{0} f_p^-(\eta) \cos \mu_p (\eta + \alpha)\, d\eta.$$

Из (6) и (9) видно, что если $f^+(x,\, y) \equiv 0$, $f^-(x,\, y) \equiv 0$ и $\delta_k \neq 0$, то из (4) имеем

$$u_k(y) = \sqrt{\frac{2}{r}} \int\limits_{0}^{r} u(x,y) \sin \mu_k x\, dx = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, в силу полноты системы функций (5) в пространстве $L_2[0,\, r]$ и непрерывности $u(x,y)$ в $\overline{\Omega}$, следует, что $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 1. *Если существует решение $u(x,y)$ задачи 1, то оно однозначно определяется только тогда, когда выполнено условие* (8).

Список использованных источников

1. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.

2. *Нахушева З. А.* Нелокальные краевые задачи для основных и смешанного типов дифференциальных уравнений. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2011. 196 с.
3. *Киржинов Р. А.* Аналог задачи Дезина для уравнения параболо—гиперболического типа с условиями периодичности // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26, № 2. С. 259–272.
4. *Нахушева З. А.* Об одной нелокальной задаче А. А. Дезина для уравнения Лаврентьева—Бицадзе // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1199–1203.
5. *Сабитов К. Б.* Задача Дезина для уравнения смешанного типа со степенным вырождением // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 10. С. 1426–1431.
6. *Сабитов К. Б., Новикова В. А.* Нелокальная задача А. А. Дезина для уравнения Лаврентьева—Бицадзе // Изв. вузов. Матем. 2016. № 6. С. 61–72.
7. *Сабитов К. Б.* Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // Доклады Академии наук. 2007. Т. 413, № 1. С. 23–26.
8. *Будак Б. М., Фомин С. В.* Кратные интегралы и ряды: Серия «Курс высшей математики и математической физики». М.: Наука, 1967. 608 с.

Поступила 26.11.2024; одобрена после рецензирования 06.12.2024; принята к публикации 13.12.2024.

Об авторе:

Киржинов Ромазан Анатольевич, младший научный сотрудник отдела Уравнений смешанного типа Института прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН (360000, Россия, Кабардино-Балкарская Республика, г. Нальчик, ул. Шортанова 89А), ORCID https://orcid.org/0000-0001-6645-7175, kirzhinov.r@mail.ru

References

1. *Nakhushev A. M.* Zadachi so smeshcheniem dlia uravnenii v chastnykh proizvodnykh [Problems with Shifts for Partial Differential Equations]. M.: Nauka, 2006. 287 p. (in Russian)
2. *Nakhusheva Z. A.* Nelokal'nye kraevye zadachi dlia osnovnykh i smeshannogo tipov differentsial'nykh uravnenii [Nonlocal Boundary-Value Problems for Basic and Mixed Types of Differential Equations]. Nalchik: KBNTs RAN, 2012. 196 p. (in Russian)
3. *Kirzhinov R. A.* Dezin problem analog for a parabolic-hyperbolic type equation with periodicity condition. J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci. 2022. Vol. 26, No. 2. Pp. 259–272.
4. *Nakhusheva Z. A.* On a nonlocal problem of A. A. Dezin for the Lavrent'ev—Bitsadze equation. Differ. Equat. 2009. Vol. 45, No. 8. Pp. 1223—1228.
5. *Sabitov K. B.* Dezin problem for an equation of the mixed type with a power-law degeneracy. Differ. Equat. 2019. Vol. 55, No. 10. Pp. 1384–1389.
6. *Sabitov K. B., Novikova V. A.* Nonlocal Dezin's problem for Lavrent'ev–Bitsadze equation. Russian Math. (Iz. VUZ). 2016. Vol. 60, No. 6. Pp. 52–62.
7. *Sabitov K. B.* Dirichlet problem for mixed-type equations in a rectangular domain. Dokl. Math. 2007. Vol. 75, No. 1. Pp. 193–196.
8. *Budak B. M., Fomin S. V.* Multiple integrals, field theory and series. An advanced course in higher mathematics. M.: Mir Publ., 1973. 640 p.

Submitted 26.11.2024; approved after reviewing 06.12.2024; accepted for publication 13.12.2024.

About the author:

Kirzhinov Romazan Anatolevich, Junior Researcher at the Dept. of Mixed–Type Equations Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS (360000, Kabardino-Balkarian Republic, Nalchik, 89A Shortanov St.), ORCID https://orcid.org/0000-0001-6645-7175, kirzhinov.r@mail.ru