МАТЕМАТИКА

УДК 517.95
https://doi.org/10.47928/1726-9946-2025-25-4-14-20
HTXCYF
Научная статья

Задача сопряжения двух уравнений третьего порядка гиперболического типа

Р. Х. Макаова

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, г. Нальчик, Россия
Makaova.ruzanna@mail.ru

Аннотация. В смешанной прямоугольной области исследуется задача сопряжения двух уравнений гиперболического типа третьего порядка. В положительной части области рассматриваемое уравнение совпадает с уравнением Аллера, а в отрицательной части – с модельным уравнением третьего порядка. Задача заключается в нахождении регулярного решения рассматриваемого уравнения, когда на положительной части границы области заданы смешанные граничные условия, а в отрицательной части заданы условия Коши на одной из характеристик. Доказана теорема о существовании единственного регулярного решения исследуемой задачи в смешанной области. Для доказательства однозначной разрешимости задачи используется метод Трикоми, согласно которому получены соответствующие фундаментальные соотношения между следами искомого решения и его производной, перенесенные из положительной и отрицательной частей смешанной области на линию сопряжения. Из полученных фундаментальных соотношений, в результате исключения одного из искомых функций, приходим к смешанной краевой задаче для неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно второй искомой функции – следа производной искомого решения, решение которой найдено и выписано в явном виде. Тогда и решение исследуемой задачи выписывается в явном виде как решение смешанной краевой задачи для уравнения Аллера в положительной части смешанной области и как решение задачи Дарбу для модельного уравнения гиперболического типа третьего порядка в отрицательной части. В работе также найдены достаточные условия на заданные функции, обеспечивающие регулярность полученных решений исследуемой задачи.

Ключевые слова: модельное гиперболическое уравнение третьего порядка, уравнение Аллера, краевая задача, метод Трикоми.

Финансирование. Работа выполнена в рамках гос. задания Минобрнауки РФ по проекту: Краевые задачи и задачи оптимального управления для локальных и нелокальных уравнений математической физики (1024031200120-2).

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Для цитирования. *Макаова Р. Х.* Задача сопряжения двух уравнений третьего порядка гиперболического типа // Доклады АМАН. 2025. Т. 25, № 4. С. 14–20. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2025-25-4-14-20; EDN: HTXCYF

© Макаова Р. Х., 2025

Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.

MATHEMATICS

MSC 35L25 Original article

The problem of conjugation of two third-order hyperbolic equations

Ruzanna Kh. Makaova

Institute of Applied Mathematics and Automation of KBSC RAS, Nalchik, Russia
Makaova.ruzanna@mail.ru

Abstract. The problem of conjugating two third-order hyperbolic equations is studied in a mixed rectangular domain. In the positive part of the domain, the equation under consideration coincides with the Hallaire equation, and in the negative part, with a third-order model equation. The problem consists of finding a regular solution to the equation under consideration when mixed boundary conditions are specified on the positive part of the domain boundary, and Cauchy conditions on one of the characteristics are specified in the negative part. A theorem on the existence of a unique regular solution to the problem under consideration in the mixed domain is proved. To prove the unique solvability of the problem, the Tricomi method is used. According to this method, the corresponding fundamental relations between the traces of the desired solution and its derivative are obtained, transferred from the positive and negative parts of the mixed domain to the conjugation line. From these fundamental relations, by eliminating one of the desired functions, we arrive at a mixed boundary value problem for a second-order inhomogeneous ordinary differential equation with respect to the second desired function—the trace of the derivative of the desired solution. The solution to this problem is found and written out explicitly. Then, the solution to the problem under study is written out explicitly as a solution to a mixed boundary value problem for the Hallaire equation in the positive part of the mixed domain and as a solution to the Darboux problem for a third-order hyperbolic model equation in the negative part. The paper also finds sufficient conditions on the given functions that ensure the regularity of the obtained solutions to the problem under study.

Keywords: model third-order hyperbolic equation, the Hallaire equation, boundary value problem, Tricomi method.

Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation on the project: Boundary value problems and optimal control problems for local and nonlocal equations of mathematical physics (1024031200120-2).

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author participated in the writing of the article and is fully responsible for submitting the final version of the article to the press.

For citation. *Makaova R. Kh.* The problem of conjugation of two third-order hyperbolic equations. Adyghe Int. Sci. J. 2025. Vol. 25, No. 4. Pp. 14–20. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2025-25-4-14-20; EDN: HTXCYF

© Makaova R. Kh., 2025

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Введение. Рассматривается уравнение вида

$$f(x,y)=\begin{cases} u_y-au_{xx}-bu_{xxy}, & y>0,\\ u_{xxx}+u_{xxy}-u_{xyy}-u_{yyy}, & y<0,\end{cases} \tag{1}$$

где a, b – заданные положительные числа; $f(x,\,y)$ – известная функция; $u(x,y)$ – искомая действительная функция.

Пусть $\Omega=\Omega^+\cup\Omega^-\cup A_0A_r$, $\Omega^+=\{(x,y):0<x<r,0<y<T\}$, где r, $T<\infty$, а Ω^- – область, ограниченная характеристиками $A_0C:\ x+y=0$, $A_rC:\ x-y=r$ уравнения (1) при $y<0$, выходящими из точек $A_0=(0,\,0)$, $A_r=(r,\,0)$ и пересекающимися в точках $C=\left(\frac{r}{2},-\frac{r}{2}\right)$; $B_0=(0,T)$, $B_r=(r,T)$, $A_0A_r=\{(x,0):0<x<r\}$.

В положительной части области уравнение (1) совпадает с неоднородным уравнением Аллера [1], которое является уравнением гиперболического типа третьего порядка, хотя его относят к уравнениям псевдопараболического типа [2]. Его решение интерпретируется как влажность почвы с коэффициентом диффузии a и коэффициентом влагопроводности b в точке x почвенного слоя $0\le x\le r$ в момент времени $t\in[0,T]$ [3]. В работе [4] уравнение (1) называется модифицированным уравнением влагопереноса. Исследованию различных краевых задач для псевдопараболических уравнений, в частности, и для уравнения Аллера, посвящены работы [5]–[11].

В отрицательной части области уравнение (1) представляет собой модельное уравнение третьего порядка гиперболического типа. Локальные краевые задачи для такого уравнения рассмотренны в работе [12], в котором решения исследуемых задач выписываются в явном виде и найдены условия, обеспечивающие регулярность полученных решений.

В работах [13], [14] для рассматриваемого уравнения (1) ставятся и исследуются локальные краевые задачи.

Регулярным в области Ω решением уравнения (1) *назовем функцию $u=u(x,\,y)$ такую, что $u\in C\left(\overline{\Omega}\right)\cap C^1\left(\overline{\Omega}\setminus\{A_0B_0\cup B_0B_r\cup A_rC\}\right)\cap C^{2,1}_{x,y}(\Omega^+)\cap C^{i,j}_{x,y}(\Omega^-)$, $(i+j=3$, $i=\overline{0,3}$, $j=\overline{0,3})$, $u_{xxy}(x,0)\in L_1(A_0A_r)$ и удовлетворяющую уравнению* (1).

Постановка задачи и полученный результат. Исследуется следующая

Задача. *Найти регулярное в области Ω решение $u=u(x,\,y)$ уравнения* (1), *удовлетворяющее следующим краевым условиям:*

$$u(0,\,y)=u_x(r,\,y)=0,\ \ 0\le y<T, \tag{2}$$

$$u[\theta_0(x)]=\phi_1(x),\ \ 0\le x\le r, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}[\theta_0(x)]=\phi_2(x),\ \ 0\le x\le r, \tag{4}$$

где $\theta_0(x)=\left(\frac{x}{2},\,-\frac{x}{2}\right)$ – аффикс точки пересечения характеристики, выходящей из точки $(x,\,0)\in A_0A_r$ с характеристикой A_0C; $\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная по направлению внутренней нормали n к характеристике A_0C; $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ – заданные на $[0,\,r]$ функции.

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть заданные функции $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ и $f(x,\,y)$ таковы, что*

$$\phi_1(x),\ \phi_2(x)\in C^1[0,\,r]\cap C^3\,]0,\ r[\,,\ f(x,\,y)\in C^1\left(\overline{\Omega}\right).$$

Тогда задача (2)–(4) *для уравнения* (1) *имеет и притом единственное регулярное в области Ω решение.*

Доказательство. Пусть существует решение $u(x,\,y)$ задачи (2)–(4) для уравнения (1) и пусть

$$u(x,\,0)=\varphi(x)\,,\;\;0\le x\le r, \tag{5}$$

$$u_y(x,\,0)=\psi(x)\,,\;\;0<x<r. \tag{6}$$

Общее решение уравнения (1) при $y<0$ можно выписать в виде [13]

$$u(x,\,y)=g_1(x+y)+(x+y)\;g_2(x-y)+g_3(x-y)+$$

$$+\frac{1}{8}\int\limits_0^{x-y}\int\limits_0^{x+y}(x+y-s)\,f\left(\frac{s+t}{2};\frac{s-t}{2}\right)dsdt, \tag{7}$$

где g_k, $k=\overline{1,3}$ – произвольные функции своих аргументов.

Удовлетворяя (7) заданным краевым условиям (3)–(5), находим функции g_k, $k=\overline{1,3}$:

$$g_1(x)=\varphi(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}x\phi_2(x)+xg_1'(0)-\phi_1(x)+g_1(0)-$$

$$-\frac{1}{8}\int\limits_0^{x}\int\limits_0^{x}(x-s)\,f\left(\frac{s+t}{2};\frac{s-t}{2}\right)dsdt,$$

$$g_2(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\phi_2(x)-g_1'(0)\,,$$

$$g_3(x)=\phi_1(x)-g_1(0).$$

Подставляя найденные функции g_k, $k=\overline{1,3}$, из (7) находим решение задачи (3)–(5) для уравнения (1) при $y<0$ в виде

$$u(x,\,y)=\varphi(x+y)+\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\left[\phi_2(x-y)-\phi_2(x+y)\right]+$$

$$+\phi_1(x-y)-\phi_1(x+y)-\frac{1}{8}\int\limits_{x-y}^{x+y}\int\limits_0^{x+y}(x+y-s)\,f\left(\frac{s+t}{2};\frac{s-t}{2}\right)dsdt. \tag{8}$$

Из (8) с учетом условия (6), получаем фундаментальное соотношение между функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, принесенное из области Ω^- на линию $y=0$ в виде

$$\varphi'(x)=\psi(x)+F(x), \tag{9}$$

где

$$F(x)=\sqrt{2}x\phi_2'(x)+2\phi_1'(x)+\frac{1}{4}\int\limits_0^{x}(x-s)\,f\left(\frac{s+x}{2};\frac{s-x}{2}\right)ds.$$

Из уравнения (1) в положительной части области переходя к пределу при $y\to+0$, с учетом обозначений (5) и (6) находим фундаментальное соотношение между функциями

$\varphi(x)$ и $\psi(x)$, принесенное из области Ω^+ на линию $y=0$ в виде

$$\varphi''(x) = -\frac{a}{b}\psi''(x) + \frac{1}{a}\psi(x) - \frac{1}{a}f(x,0), \tag{10}$$

а из краевых условий (2) получаем следующие условия согласования

$$\varphi(0) = 0, \;\; \varphi'(r) = 0, \tag{11}$$

$$\psi(0) = 0, \;\; \psi'(r) = 0. \tag{12}$$

Из соотношений (9) и (10), исключая функцию $\varphi(x)$, относительно функции $\psi(x)$ приходим к следующему дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\psi''(x) + \frac{a}{b}\psi'(x) - \frac{1}{b}\psi(x) = w(x), \tag{13}$$

$$w(x) = -\frac{1}{b}f(x,\,0) - \frac{a}{b}F'(x).$$

Решение задачи (12) для уравнение (13) существует и единственно, и выписывается по формуле

$$\psi(x) = \frac{1}{k_1-k_2}\int\limits_0^x \left[e^{k_1(x-\xi)} - e^{k_2(x-\xi)}\right] w(\xi)d\xi +$$

$$+\frac{e^{k_2x}-e^{k_1x}}{(k_1-k_2)\left(k_1e^{k_1r}-k_2e^{k_2r}\right)}\int\limits_0^r \left[k_1e^{k_1(r-\xi)} - k_2e^{k_2(r-\xi)}\right] w(\xi)d\xi, \tag{14}$$

где

$$k_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+4b}}{2b}.$$

При этом из (9) и первого условия из (11) находим, что

$$\varphi(x) = \int\limits_0^x \left[\psi(\xi) + F(\xi)\right] d\xi. \tag{15}$$

После того как функция $\varphi(x)$ найдена, решение исследуемой задачи при $y<0$ выписывается по формуле (8), а при $y>0$ решение смешанной краевой задачи (2), (5) для уравнения (1) находится в виде [15]

$$u(x,y) = \int\limits_0^r G(x,y;\xi,0)\left[\varphi(\xi) - b\varphi''(\xi)\right] d\xi + \int\limits_0^r\int\limits_0^y G(x,y;\xi,\eta)\, f(\xi,\eta)\; d\eta\, d\xi, \tag{16}$$

где функция $G(x,y;\xi,\eta)$ определяется по формуле

$$G(x,y;\xi,\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{r(1+b\mu_n)} e^{-\frac{a\mu_n}{1+b\mu_n}(y-\eta)} \sin\left(\sqrt{\mu_n}x\right)\sin\left(\sqrt{\mu_n}\xi\right), \;\; \mu_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2r}\right)^2.$$

Из (14) и (15) следует, что однородная задача будет обладать только нулевым решением $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0 \; \forall x \in [0, r]$. А значит, из представлений (8) и (16) заключаем, что однородная задача, соответствующая задаче (2)–(4) для уравнения (1) будет иметь только тривиальное решение $u(x, y) \equiv 0 \; \forall \; (x, y) \in \bar{\Omega}$, что говорит о единственности регулярного решения исследуемой задачи.

Список использованных источников

1. *Hallaire M.* Potential efficace de l'eau dans le sol en regime de dessechement // Assemblee generale de Berkeley-General Assembly of Berkeley, Publ. (Gentbrugge). 1963. № 62. Pp. 114–122.
2. *Showalter R. E., Ting T. W.* Pseudoparabolic partial differential equations // SIAM J. Math. Anal. 1970. Vol. 1, No. 1. Pp. 1–26.
3. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.
4. Чудновский А. Ф. Теплофизика почв. М.: Наука, 1976. 352 с.
5. *Баренблатт Г. И., Желтов И. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // ПММ. 1960. Т. 24, № 5. С. 852–864.
6. *Coleman B. D., Duffin R. J., Mizel V. J.* Instability, uniqueness, and nonexistence theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xtx}$ on a strip // Arch. Rat. Mech. Anal. 1965. Vol. 19, No. 2. Pp. 100–116.
7. *Colton D.* Pseudoparabolic equations in one space variable // J. Differ. Equations. 1972. Vol. 12, No. 3. Pp. 559–565.
8. *Yangarber V. A.* The mixed problem for a modified moisture-transfer equation // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1967. Vol. 8, No. 1. Pp. 62–64.
9. *Kozhanov A. I.* On a Nonlocal Boundary Value Problem with Variable Coefficients for the Heat Equation and the Aller Equation // Differ. Equ. 2004. Vol. 40, No. 6. Pp. 815–826.
10. *Макаова Р. Х.* Вторая краевая задача для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана–Лиувилля // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т. 17, № 3. С. 35–38.
11. *Макаова Р. Х.* Первая краевая задача в нелокальной постановке для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана – Лиувилля // Вестник АГУ. Серия 4: Естественно-математические и технические науки. 2017. № 4 (211). С. 36–41.
12. *Балкизов Ж. А.* Локальные краевые задачи для модельного уравнения третьего порядка гиперболического типа // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2022. № 5 (109). С. 11–18. DOI: 10.35330/1991-6639-2022-5-109-11-18
13. *Балкизов Ж. А., Макаова Р. Х.* Краевая задача для одного смешанно-гиперболического уравнения третьего порядка // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки. 2022. Т. 37, № 3. С. 19–24. DOI: 10.21779/2542-0321-2022-37-3-19-24
14. *Макаова Р. Х.* Об одной задаче сопряжения двух гиперболических уравнений третьего порядка // Доклады АМАН. 2024. Т. 24, № 4. С. 55–61. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2024-24-4-55-61; EDN: ZVUGLU
15. *Макаова Р. Х.* Смешанная задача для неоднородного уравнения Аллера // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2021. Т. 21, № 4. С. 18–21. DOI: 10.47928/1726-9946-2021-21-4-18-21

Поступила 29.10.2025; одобрена после рецензирования 26.11.2025; принята к публикации 01.12.2025.

Об авторе:

Макаова Рузанна Хасанбиевна, младший научный сотрудник отдела Уравнения смешанного типа Института прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН (360000, Россия, КБР, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А), ORCID https://orcid.org/0000-0003-4095-2332, makaova.ruzanna@mail.ru

References

1. *Hallaire M.* Potential efficace de l'eau dans le sol en regime de dessechement // Assemblee generale de Berkeley-General Assembly of Berkeley, Publ. (Gentbrugge). 1963. No. 62. Pp. 114–122.
2. *Showalter R. E., Ting T. W.* Pseudoparabolic partial differential equations // SIAM J. Math. Anal. 1970. Vol. 1, No. 1. Pp. 1–26.
3. *Nahushev A. M.* Zadachi so smeshcheniem dlya uravnenij v chastnyh proizvodnyh [Shift problems for partial differential equations]. M.: Nauka, 2006. 287 p. (In Russian)
4. *Chudnovskij A. F.* Teplofizika pochv [Soil thermophysics]. Moscow, Nauka, 1976, 352 p. (In Russian)
5. *Barenblatt G. I., Zheltov Iu. P., Kochina I. N.* Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata] // J. Appl. Math. Mech. 1960. Vol. 24, No. 5. Pp. 852–864.
6. *Coleman B. D., Duffin R. J., Mizel V. J.* Instability, uniqueness, and nonexistence theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xtx}$ on a strip // Arch. Rat. Mech. Anal. 1965. Vol. 19, No. 2. Pp. 100–116.
7. *Colton D.* Pseudoparabolic equations in one space variable // J. Differ. equations. 1972. Vol. 12, No. 3. Pp. 559–565.
8. *Yangarber V. A.* The mixed problem for a modified moisture-transfer equation // Journal of applied mechanics and technical physics. 1967. Vol. 8, No. 1. Pp. 62–64.
9. *Kozhanov A. I.* On a nonlocal boundary value problem with variable coefficients for the heat equation and the Aller equation // Differ. equations. 2004. Vol. 40, No. 6. Pp. 815–826.
10. *Makaova R. Kh.* Second Boundary Value Problem for the Generalised Aller Equation with Fractional Riemann-Liouville Derivative // Adyghe Int. Sci. J. 2015. Vol. 17, No. 3. Pp. 35–38. (In Russian)
11. *Makaova R. Kh.* The first boundary value problem in a non-local setting for the generalized Aller equation with a fractional Riemann-Liouville derivative // The Bulletin of Adyghe State University: Internet Scientific Journal. 2017. No. 4(211). Pp. 36–41. (In Russian)
12. *Balkizov Zh. A.* Local boundary value problems for a model equation of the third order of hyperbolic type // News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS. 2022. No. 5(109). Pp. 11–18. DOI: 10.35330/1991-6639-2022-5-109-11-18. (In Russian)
13. *Balkizov Zh. A., Makaova R. Kh.* Boundary value problem for one mixed-hyperbolic equation of third order // Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1: Estestvennye nauki. 2022. Vol. 37, No. 3. Pp. 19–24. DOI: 10.21779/2542-0321-2022-37-3-19-24. (In Russian)
14. *Makaova R. Kh.* On one problem of conjugation of two hyperbolic equations of the third order // Adyghe Int. Sci. J. 2024. Vol. 24, No. 4. Pp. 55–61. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2024-24-4-55-61; EDN: ZVUGLU. (In Russian)
15. *Makaova R. Kh.* Mixed problem for the inhomogeneous Hallaire equation // Adyghe Int. Sci. J. 2021. Vol. 21, No. 4. Pp. 18–21. DOI: 10.47928/1726-9946-2021-21-4-18-21. (In Russian)

Submitted 29.10.2025; approved after reviewing 26.11.2025; accepted for publication 01.12.2025.

About the author:

Makaova Ruzanna Khasanbievna, junior researcher department of mixed type equations Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS (360000, Russia, Kabardino-Balkarian Republic, Nalchik, 89A Shortanov St.), ORCID https://orcid.org/0000-0003-4095-2332, makaova.ruzanna@mail.ru